现代应用数学丛书

复变函数论

〔日〕功力金二郎 著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

复变函数論

〔日〕功力金二郎 著
刘 书 琴 譯
楊 宗 磐 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。全书扼要地讲述了复变函数論的一些初步概念：复数及綫性函数、正則函数及初等函数、Cauchy 积分定理、单值函数的正則性及孤立奇点、解析开拓、共形映射、单純函数、椭圆函数等共八章。原书分二册，現合并成一册出版。

本书可供有关高等学校作为教学参考书，也可供工程师、科学工作者参考。

现代应用数学丛书

复 变 函 数 論

原书名　複素函数論 I II
原著者　〔日〕功力金二郎
原出版者　岩波书店，1958
譯者　刘书琴
校者　楊宗磐

*

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印张 7 28/32　字数 186,000
1963年6月第1版　1963年6月第1次印刷
印数 1—7,350

統一书号 13119·512
定价：（十四）1.35 元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其内容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对内容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书内容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

书名	原作者	譯者	书名	原作者	譯者
代数学*	弥永昌吉等	熊全淹	非綫性振动論*	古屋茂	呂紹明
几何学*	矢野健太郎	孙澤瀛	力学系与映射理論*	岩田义一	孙澤瀛
复变函数*	功力金二郎	刘书琴	平面彈性論*	森口繁一	刘亦珩
集合·拓扑·测度*	河田敬义	賴英华	有限变位彈性論与变形几何学*	山本善之 近藤一夫	刘亦珩
泛函分析*	吉田耕作	程其襄	塑性論*	鷲津久一郎	刘亦珩
广义函数*	岩村联	楊永芳	粘性流体理論*	谷一郎	刘亦珩
常微分方程*	福原满洲雄	張慶芳	可压縮流体理論*	河村龙馬	刘亦珩
偏微分方程*	南云道夫	錢端壮	网絡理論*	喜安善市等	陆志刚
特殊函数*	小谷正雄等	錢端壮	自动控制理論*	喜安善市等	翟立林
差分方程*	福田武雄	穆鴻基	网絡拓扑学·	近藤一夫	張設
富里哀变换与拉普拉斯变换*	河田龙夫	錢端壮	信息論*	喜安善市等	李文湘
变分法及其应用*	加藤敏夫	周怀生	推断統計过程論	北川敏男	刘璋温
李群論*	岩堀长庆	孙澤瀛	統計分析*	森口繁一	刘璋温
随机过程*	伊藤清	刘璋温	試験設計法*	增山元三郎	刘璋温
回轉群与对称群的应用*	山内恭彦等	張质賢	群体遺傳学的数学理論*	木村資生	刘祖洞
結晶統計与代数*	伏見康治	孙澤瀛	博奕論*	宮澤光一	張毓椿
偏微分方程的应用	犬井鉄郎等	楊永芳	綫性規划*	森口繁一等	刘源張
微分方程的近似解法	加藤敏夫等	王占瀛	經济理論中的数学方法*	安井琢磨等	談祥柏
数值計算法*	森口繁一等	閻昌齡	随机过程的应用*	河田龙夫	刘璋温
量子力学中的数学方法*	朝永振一郎	周民强	計算技术	高桥秀俊	姚晋
工程力学系統*	近藤一夫等	刘亦珩	穿孔卡計算机	森口繁一	刘源張

注：有 * 者已經出版，有 · 者即將出版。

譯 者 序

复变数函数論是数学中发展得成熟的一个分支，也是近代数学的基础之一，内容非常丰富。本书作者在不大的篇幅内介紹了它的主要内容的初步，对材料的取舍和安排作了不少努力，应当說这是一本学习复变数函数論的較好入門讀物。

由于客观的需要，复变数函数的研究在十八世紀就已开始。如果再往前追溯的話，有关的个别概念还更早一些。例如本书中提到的 Cauchy-Riemann 方程，事实上在十八世紀初已由 d'Alembert 和 Euler 研究过。尤其是 Euler 还研究了复变数函数在流体力学、地图制作法及积分学上的应用。但是对之作系統的研究，从而形成为数学的一个独立分支的，則应当首推 Cauchy，其次有 Riemann 和 Weierstrass 也都作出了不少貢献。在上一世紀，随着生产发展的需要和数学其他分支的影响，这門学科得到了飞跃的发展而趋于成熟，到今天已成为数学的主要基础之一。

自从 Weierstrass 提出了"函数 $f(z)$ 在其本性奇点的邻域内可趋近于任一値"的性质以后，Picard 在 1879 年应用模函数証明了所謂 Picard 定理（第 7 章）。从此展开了近代的整函数及半純函数的理論。对于整函数，由于 Borel, Valiron, Hadamard 等人的研究，以更精密的結果丰富了 Picard 定理的内容，同时对于整函数的値的分布，函数模增长的状况作了不少的研究❶。到本世紀三十年代，R. Nevanlinna 利用 Jensen 公式（§ 20）証明了所謂第一、第二基本定理（§ 20），把过去得到的关于整函数和半純函数

---

❶ 例如，可參看 Б. Я. Левин: Распределение Корней целых Функций, 1956; Boas: Entire functions, 1954; 及 Cartwright: Integral Functions, 1956.

的某些个别結果加以統一，树立了半純函数值的分布理論，推广了 Picard 定理❶。和以上理論緊密地联系着的有聚值集理論，半純函数的反函数，Riemann 面型的問題等，都在近代得到了发展❷。

以具有某些性质的函数族作为研究的对象，由个别函数的理論促进了函数族理論的发展。反过来，又由函数族的理論推导出个别函数的一系列性质。例如正規族的理論，就是本世紀复变数函数論的新的内容之一。正規族理論的研究，不只解决了古典函数論中一些重大問題，也刺激了其他函数族理論的发展❸。

共形映照是古典問題之一，十九世紀以前，已在逐漸发展，自 Riemann 开始作了系統研究，給出了共形映射的基本定理(§17)，开辟了几何函数論的新途徑，遂成为复变数函数論的基本内容之一。自此以后，經过 Schwarz, Picard, Poincaré, Koebe 等人的努力，到本世紀初，Carathéodory 給出了領域核的概念❹，并研究了边界对应的关系(§17)。最簡单的問題是单連通域的单叶映射，对应的函数就是单叶函数。单叶函数的理論自 Koebe 开始，經过 Bieberbach, Löwner, Littlewood, Голузин, Schiffer 等人的研究，到现在已有极大的发展。在单叶函数論中，例如偏差定理，旋轉定

---

❶ 可参看，例如辻正次：函数論上下卷，日本朝仓书店，1952；清水辰次郎：較近函数論，日本岩波数学讲座，1935；R. Nevanlinna: Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris, 1929 及 R. Nevanlinna: Eindeutige analytische Funktionen, Springer, Berlin, 1953.

❷ 参看李国平：半純函数的聚値綫理論，科学出版社，1958；能代清：最近ノ函数論，日本岩波书店，1941；R. Nevanlinna: Eindeutige analytische Funktionen, Springer, 1953.

❸ 参看前引清水辰次郎的书及 P. Montel: Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications, Gauthier-Villars, Paris, 1927.

❹ 例如参看葛眷淨：复变函数几何理論，科学出版社，1956；小松勇作：等角写象論，上下册，日本共立社，1949；柏格曼：核函数和共形映照，科学出版社，1958.

理，遮蓋問題及系数問題等方面，或則已全部解决，或者已解决了一部分；这些問題的解决不仅对单叶函数論本身有极大的价值，即在数学的其他領域也受到不小的影响❶。不仅如此，由这些問題的研究而产生的方法（例如变分方法）已成为研究某些其他分支的有利工具。

在单叶映射研究的影响下，非单叶映射也有了很大发展，这就是多叶函数的研究。这应当归功于 Littlewood, Голузин, Spencer, Hayman 等人❷。

至于多連通域的映射，Koebe, Poincaré, Grötzsch, Grunsky 等人在这方面作了不少的工作❸。

多値函数的研究引出了許多新的問題，Riemann 面和单值化問題就是其中主要的方面。本书对于 Riemann 面已經給与了近代化的定义（§15），在 Ahlfors-Sario 和 Weyl❹ 的书上有进一步的闡述。至于单值化問題，那就是研究域 D_w 和域 R_z 之間的多值关系表为单值关系的問題，十九世紀末期曾經有不少人，如 Poincaré, Klein, Schwarz 等作了一些奠基性的以及某些特殊情况的研究。例如代数函数的单值化可以由自守函数完全解决；由此引起了拓扑与共形映射理論的結合。到 1908 年，Koebe 和 Poincaré 同时解决了这一問題，最近有关这一問題的研究，更有了极大的发展❺。

---

❶ 例如参看葛督淨：单叶函数的某些問題，科学出版社，1956；Shaeffer and Spencer: Coefficient regions for schlicht functions, Am. Math. Soc., 1950. Hayman: Multivalent functions. 此外，或可参看上引葛督淨及前引清水辰次郎的书。

❷ 参看 Hayman: Multivalent functions.

❸ 参看前引葛督淨的复变函数几何理論及小松勇作的书。

❹ Ahlfors-Sario: Riemann surfaces, Princeton univ. Press, 1960; Weyl: Die Idee der Riemannschen Fläche, 3te Aufl., 1955.

❺ 可参看尼凡林那：单值化，科学出版社，1960.

此外，在复变数函数論中还有很多重要分支，例如特殊函数，多复变数函数，广义解析函数，拟似共形映射等都有很大发展，可資参考的书籍很多，这里不能一一列举。

限于譯者的水平，謬誤之处，請讀者批評指正。

刘书琴

1962年9月

目　录

第1章 复数及綫性函数

§1 复 数

复变数函数論简称复变函数論，更簡单地叫做函数論。它是由十八世紀末开始，在十九世紀建立了巩固的基础，本世紀更进一步成为数学主流之一，随着年代的增加，加入了新开拓的分支，直至最近已成为一門龐大的学科。其中大体可分为一变数及多变数两种情形。这里只介紹一变数的情形。

所謂一变数函数論，即給定一个独立变数 z，对应着一个从属变数 w，复变函数論就是研究当 z 及 w 全是复数的情形。現今有企图用更复杂的其他数以替代复数的。但是这样就不能保持复数情形的协調。这恐怕是因为复数在数系里占有一种独特的地位所招致的。故我們首先应当考虑复数在数系内占有如何的地位。

1) **复数在数系中的地位** 先假定我們对于实数是已經知道的，則用实数定义新数，应当先看一看究竟要得出怎样的結果。最初对于这样新的数（今后簡单地叫做**数**），規定服从以下的四个公理，即希望**加法**为可能。

A_1 任意两数 α, β, 可以施行加法 $\alpha+\beta$. 其結果为唯一确定的一个数。

A_2 服从加法結合律: $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$.

A_3 服从加法交换律: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

A_4 (减法的可能性)对于任意两数 α 及 β,方程 $\alpha+z=\beta$ 至少有一个根 z 存在。

由以上四公理可以簡单地証明：对于数中的任一数 α，使 $\alpha+\theta=\theta+\alpha=\alpha$ 成立的数 θ 只有一个存在，且 $\alpha+z=\beta$ 的根 z 由 α 及 β

唯一地确定(参閱本丛书中的«代数学»)。这样的 z 写成 $\beta-\alpha$。

其次,我們增添用实数 a 乘数 α 的假定,且滿足以下的四个公理:

S_1 全体的数 α 可以用实数 a 乘,就是可以作出 $a\alpha$。$a\alpha$ 为由 a 及 α 所决定的数。特別地,对于任意数 α 有 $1\cdot\alpha=\alpha$。

S_2 对于任意的实数 a 及任意两数 α 及 β,下式成立:

$$a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta.$$

S_3 任意二个实数 a, b 以及任意数 α 之間,下式成立:

$$(a+b)\alpha=a\alpha+b\alpha.$$

S_4 任意二个实数 a, b 以及任意数 α 之間,下式成立:

$$(ab)\alpha=a(b\alpha).$$

由此公理,对于所有的数 α 有 $0\cdot\alpha=\theta$,对于全体的实数 a 有 $a\theta=\theta$。又只要 $a\neq 0$, $\alpha\neq\theta$,则 $a\alpha\neq\theta$。

今对于 n 个数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,假定只当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ 时才使 $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n=\theta$。这种性质叫做 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 彼此**綫性独立**。因此,对于它假定以下公理成立:

D　有限的自然数 m 存在,任何 $m+1$ 个数都不能为綫性独立。

命这一公理中的自然数 m 中的最小的为 n,并設 θ 之外还有数存在。这样恰好有 n 个綫性独立的数 e_1、$e_2, \cdots, e_n$ 存在,使其他的任意数 ξ 常可用以下的形状唯一地表示:

$$\xi=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n, \tag{1.1}$$

即可考虑为具有坐标$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的向量。

这里,我們再考虑眞的乘法,

M_1　任意两数 α, β 之間可以施行乘法。它的結果是唯一的,用 $\alpha\beta$ (或 $\alpha\cdot\beta$)表示。

M_2　加法与乘法之間分配律成立。即对于任意的 α, β, γ 有

$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$, $(\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha$.

M_3 乘法及实数乘法之間有以下关系成立：对于任意的数 α, β 及实数 a, b 有 $(a\alpha)\cdot(b\beta)=(ab)(\alpha\beta)$.

由此，对于任意的数 α 有 $\alpha\theta=\theta\alpha=\theta$.

作为乘法的性质，还考虑以下的两公理：

M_4 乘法服从結合律。对于任意的 α, β, γ 有

$$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma.$$

M_5（单位的存在） 存在数 ε，对于任意的数 α 有 $\varepsilon\alpha=\alpha\varepsilon=\alpha$.

可以推出这样的单位只有一个。作为另外的乘法公理，可以考虑 $\alpha\neq\theta$ 的 α 作除数的除法可能性，但是我們不作这样的假定，而假定比它弱的下列公理：

M_6 对于任意两数 α, β，假定 $\alpha\neq\theta$, $\beta\neq\theta$，則 $\alpha\beta\neq\theta$.

这里，命 a 为实数，在数 $a\varepsilon$ 及 a 之間建立对应，这对应

$$a\varepsilon\leftrightarrow a$$

是一一对应，并且加减乘除也是互相对应的，因之，成为同构。因此在这里实数的乘法和真的乘法就沒有区别了。这样，具有形如 $a\varepsilon$ 的数的全体，卽便考虑为实数也不会有矛盾。这就是說实数作为数的特別情形，而是数中的一部分，因为 θ 与 0 对应，故今后写作 $\theta=0$.

命 $e_1=\varepsilon$，当 $n=1$ 时，就只是实数了。因此問題就在于 $n\geqslant2$ 的情形。

在 $n\geqslant2$ 的时候，由于还存在着实数以外的数，取其中的任一个，命其为 ξ，作出

$$\xi,\ \xi^2,\ \xi^3,\ \cdots,\ \xi^{n+1}.$$

因为它們不是綫性独立，故以下的代数方程成立：

$$a_1\xi+a_2\xi^2+\cdots+a_{n+1}\xi^{n+1}=0, \tag{1.1}$$

其中的系数 a_1, a_2, $\cdots$, a_{n+1} 全是实数。由此可以把 (1.1) 左端因

数分解，其中的因子最高为二次式，由 M_6 知道其中至少有一个是0，也就是：对于不是实数的数 ξ，有实数 u, v 存在，使

$$(\xi-u)^2+v^2=0, \quad v\neq 0.$$

由于 $e_2, e_3, \cdots, e_n$ 不能是实数，命 $\xi=e_i\ (i=2, 3, \cdots, n)$ 求出 u_i, v_i．命

$$e_1'=e_1=1, \quad e_i'=\frac{e_i-u_i}{v_i}$$

以代替 e_i，则有 $(e_i')^2=-1, \quad i=2, 3, \cdots, n.$

今暂且假定 $n\geqslant 3$，命 $r, s=2, 3, \cdots, n$，然后作出 $(e_r'+e_s')$，$(e_r'-e_s')$，这些都不是实数（因为 e_r', e_s', 1 是綫性独立）。因此有 u, v, u', v' 存在，且 $v, v'\neq 0$，将

$$\begin{aligned}&\{(e_r'+e_s')^2-u\}^2+v^2=0,\\&\{(e_r'-e_s')^2-u'\}^2+v'^2=0\end{aligned} \tag{1.2}$$

两边相加，再整理之，得

$$-4-2(u+u')e_r'-2(u-u')e_s'+u^2+v^2+u'^2+v'^2=0.$$

由于 e_r', e_s', 1 为綫性独立，故它們的系数为0，所以

$$u=0, \quad u'=0, \quad v^2+v'^2=4.$$

若 $v, v'\neq 0$, $v^2+v'^2=4$，则有

$$0<v^2<4. \tag{1.3}$$

更由于 $u=0$，故由(1.2)有 $(e_r'+e_s')^2+v^2=0$. 由此去掉括弧得

$$-2+(e_r'e_s'+e_s'e_r')+v^2=0.$$

故
$$e_r'e_s'+e_s'e_r'=2-v^2.$$

再由(1.3)有

$$0\leqslant(e_r'e_s'+e_s'e_r')^2<4. \tag{1.3'}$$

由此命

$$e_1''=e_1'=1,\ e_2''=e_2',\ e_\nu''=x_\nu e_2'+y_\nu e_\nu'\ (\nu=3, 4, \cdots, n), \tag{1.4}$$

适当的挑选实数 x_ν, y_ν $(y_\nu\neq 0)$，使 e_1'', e_2'', $\cdots$, e_n'' 全是綫性独立，

且能够使

$$\left.\begin{array}{l} e_1''=1,\ e_2''^2=-1,\ e_3''^2=-1,\ \cdots,\ e_n''^2=-1, \\ e_2''e_\nu''+e_\nu''e_2''=0, \qquad \nu=3,\ 4,\ \cdots,\ n. \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

把(1.4)代入(1.5)，则由(1.3′)可以求出 x_ν, y_ν.

根据 (1.5) 当 $n\geqslant 3$ 时不能要求乘法的交换律。这是由于如果乘法的交换律成立，则有 $e_2''e_\nu''=0$，因而 e_2'', e_ν'' 至少有一个为 0，而这是不合理的。

一方面当 $n=2$ 时，因为 $e_1''=1$，故有 $e_1''e_2''=e_2''e_1''$. 其他的数全部由(1.1) (用 e_1'', e_2'' 代替 e_1, e_2 后) 表示出来，这时自然遵守乘法的交换律。

$n=2$ 时，这样的数叫做**复数**，习惯上常用文字 i 代替 e_2''.

因此，全体的复数都可唯一的写成 $z=x+iy$ (这里 x, y 是实数) 的形状，x 叫做 z 的**实部**，y (或 iy) 叫做 z 的**虚部**，分别用 $x=\Re z$, $y=\Im z$ 表示。特别地，当 $x=0$ 时，z 叫做**純虚数**，i 叫做**虚数单位**。

因此，我們得出以下的定理。

定理 1　滿足 $A_1\sim A_4$, $S_1\sim S_4$, D, $M_1\sim M_6$ 等 15 个公理，并且服从乘法交换律($\alpha\beta=\beta\alpha$)的数系与复数一致。

2) **关于复数的四則算法**　在 1) 內我們已經知道复数可以表示成 $z=x+iy$ 的形状，其中 x, y 是实数。这里的 i 滿足 $i^2=-1$. 現在把复数的四則算法写出来。命 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ 为两复数，

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$
$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2),$$
$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1),$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad (z_2\neq 0).$$

为了計算的便利，还有所謂**共軛复数**。給定复数 $z=x+iy$，和

它具有相同的实部、虚部只相差一負号的复数，即 $x-iy$ 叫做 $z=x+iy$ 的共軛复数，用 $\bar{z}$ 表示。

对于共軛复数与四則运算，有以下关系成立：

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2,\quad \overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2,$$

$$\overline{(z_1\cdot z_2)}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2,\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\quad (z_2\neq 0).$$

同时显然有 $\overline{(\bar{z})}=z$。

其次，有 $z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$。它叫做 z 的**模方**(norm)，用 $\mathrm{N}(z)$ 表示。$\sqrt{\mathrm{N}(z)}$ ($\geqslant 0$) 叫做 z 的**絕对值**用 $|z|$ 表示。关于此有以下的法則：

(I) 只当 $z=0$ 时，才有 $|z|=0$。

(II) 对于任意两个复数 z_1, z_2 有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \tag{1.6}$$

(III) 对于任意两个复数 z_1, z_2 有

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|. \tag{1.7}$$

§2 复数的几何表示

1) **Gauss 平面** 复数几何表示的最簡单方法为规定平面上的直角坐标，平面上点 P 的坐标为 (x, y) 时，复数

$$z=x+iy$$

即用 P 点表示。由此坐标原点 O 与 $z=0$ 对应，x 軸表示实数，y 軸表示純虛数。因此，x 軸也叫做**实軸**，y 軸也叫做**虛軸**。

这种方法虽在 1806 年由法人 Argand 发表，其实 Gauss 在 1799 年的学位論文中巳經用到了，故現在叫做 Gauss 方法。表示复数(它与平面上的点一一对应)的平面被人們叫做 **Gauss 平面**，我們也采用这一称呼。

由以上方法，复数 $z=x+iy$ 不只可以看作是 Gauss 平面上的

点 $P(x,y)$，也可以考虑为向量 **OP**. 因此，复数的和、差以及与实数相乘，都可按照几何学中向量的算法去作。至于乘法和除法也可以应用这种方法去作。有时将复数写成**极形式**比較方便。

我們已經定义了 z 的絕对值，$z=x+iy$ 时有 $|z|^2=x^2+y^2$.

因此 z 的絕对值表示 z 的向量的长。現考慮具 $\cos\theta+i\sin\theta$ 形状的复数。因为

$$N(\cos\theta+i\sin\theta)=|\cos\theta+i\sin\theta|^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1,$$

故 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ 在中心为原点、半徑为 1 的**单位圓**上。θ 显然是向量 z 与实軸的正方向的交角。

$z\neq 0$ 时命 $|z|=r$，則 $z/r=z'$ 的絕对值为 1，且在单位圓上。向量 z 与正的实軸所成的角由以上的考察显然是 θ，故 z 可以写成

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta). \qquad (2.1)$$

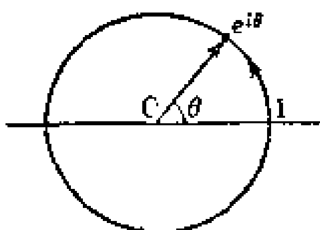


图 2.1

θ 叫做 z 的**幅角**，用

$$\theta=\arg z$$

表示。(2.1)叫做复数 z 的**极形式**，它也可以写成以下的形状：

$z=x+iy$ 时 e^z 可以用 $e^x(\cos y+i\sin y)$ 表示。

因此当 $z=x$ 时由于 $y=0$，故 e^z 与 e^x 一致。所以对于 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ 有

$$\begin{aligned}e^{z_1}e^{z_2}&=e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)\\&=e^{x_1+x_2}(\cos y_1+i\sin y_1)(\cos y_2+i\sin y_2)\\&=e^{x_1+x_2}[(\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2)\\&\qquad+i(\cos y_1\sin y_2+\sin y_1\cos y_2)]\\&=e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)]\\&=e^{z_1+z_2}.\end{aligned}$$

故上面所考慮的 $\cos\theta+i\sin\theta$ 可以簡单的用 $e^{i\theta}$ 表示。即

$$z=re^{i\theta}. \qquad (2.2)$$

两个复数的乘除引用极形式較为方便。如給定两个复数 z_1, z_2，用(2.2)表示的极形式

$$z_1=r_1e^{i\theta_1},\quad z_2=r_2e^{i\theta_2},$$

則

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i\theta_1+i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

命 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，則

$$\bar{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)=r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)],$$

故当 $z=re^{i\theta}$ 时有 $\bar{z}=re^{-i\theta}$。由此假定 $z_2\neq 0$，則

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}r_2e^{-i\theta_2}}{r_2^2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

綜合以上所述有

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\quad(z_2\neq 0),$$

$$\arg(z_1\cdot z_2)=\arg z_1+\arg z_2,$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2\quad(z_1\neq 0,\ z_2\neq 0),$$

由此显然有

$$z=re^{i\theta}\ (z\neq 0)\ 时\ z^n=r^ne^{in\theta}\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

2) **复数列的极限**　給定复数 z 后，我們已經定义了它的絕对値 $|z|$。另外复数的絕对值滿足以下三公理：

(I) $z=0$ 时，則有且只当这时才有 $|z|=0$。

(II) 对于任意的 z_1, z_2 有 $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$。

(III) 对于任意的 z_1, z_2 有 $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$。

当 z 为实数时，$|z|$ 与实数的絕对值一致，故由(III)有 $|-z|=|z|$。

今取 Gauss 平面上的两点 z_1, z_2，則

$$\rho(z_1,\ z_2)=|z_1-z_2|$$

恰巧表明两点 z_1, z_2 間的 Euclid 距离。由 $|-z|=|z|$ 有

$$\rho(z_1,\ z_2)=\rho(z_2,\ z_1).$$

由(II)对于任意的三点 z_1, z_2, z_3 有

$$\rho(z_1, z_2)+\rho(z_2, z_3)=|z_1-z_2|+|z_2-z_3|\geqslant|(z_1-z_2)+(z_2-z_3)|$$
$$=|z_1-z_3|=\rho(z_1, z_3).$$

这就得出了**三角不等式**。由(I)知两点 z_1, z_2 一致的充要条件为

$$\rho(z_1, z_2)=0.$$

这样,借上述距离,可以在 Gauss 平面上,引进 Euclid 二維空間的拓扑,从而有关的概念都可以适用。

例如所謂点列 $\{z_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 收斂于点 α, 即

$$\lim_{n\to\infty}\rho(\alpha, z_n)=0.$$

簡单地写成以下的形状:

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\alpha.$$

含于点集 A 的点 z_n 所作成的点列 $\{z_n\}$,若 $\lim z_n=\alpha$,则写作 $\alpha\in\overline{A}$,这样的点的全体为 $\overline{A}$,它叫做 A 的**閉包**。$\overline{A}=A$ 样的点集叫做**閉集**。命 Gauss 平面为 R,$R-A$ 为閉集时,A 叫做**开集**。$\overline{A}$ 及 $\overline{R-A}$ 的公共部分 $\overline{A}\cap(\overline{R-A})$ 叫做 A 的**边界**,它所属的点叫做**边界点**。A 的点而不是 A 的边界点的点叫做 A 的**内点**。

其次,不包含任何点的集叫做**空集**。A, B 为两个集,如果 $A\cap\overline{B}$ 或 $\overline{A}\cap B$ 为空集,则叫做 A, B 为**互斥**的集。給定的集不能分成两个非空的互斥的子集时,这个集叫做**連通**集。

开集并且連通的集叫做**域**(domain)。一个域内任意两点可用折綫連結、連通并且閉的集叫做**連續体**。Gauss 平面上能够包含在以原点为中心(有限半徑)的圆内的集叫做**有界集**。

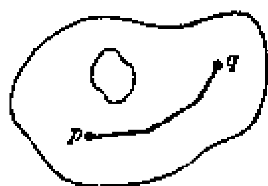


图 2.2

有界閉集 A 具有以下的性质:开集的集 $\{G\}$, A 的各点 α, 如能包含在 $\{G\}$ 的某个 G 内,则由 $\{G\}$ 中挑出有限个 $G_1, G_2, \cdots, G_n$, 它們能够把 A 复盖:

$$\bigcup_{i=1}^{n} G_i \supseteq A.$$

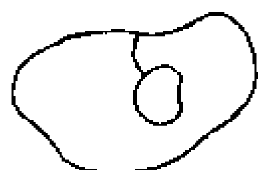
这叫做 Heine-Borel 定理。具有这样性质的集在拓扑学中叫做**紧緻集**。Heine-Borel 定理的另一种說法是有界閉集为紧緻集。任取紧緻集 A 的点列 $\{z_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$，則有子列 z_{n_ν} $(\nu=1, 2, \cdots)$ 及 A 中有一点 a 存在，使

$$\lim_{\nu\to\infty} z_{n_\nu}=a.$$

有界域的边界只由一个連續体构成时，在域内描一閉折綫，可以保持在域内連續变化而縮为域内的一点。具有这样性质的域叫做**单連通域**。相反地对于 $n\geqslant 2$ 的自然数 n，有界域的边界由 n 个彼此分离的連續体所构成的域叫做 ***n* 連通域**。一般的 $n\geqslant 2$ 时都叫做**复連通域**。由其中的一个边界連續体到其他的边界連續体作折綫能使只有端点在边界上，其他的点全在域内。如果这一折綫考虑为不属于域内，則殘余的域为 $(n-1)$ 連通域。

这样的折綫叫做原域的**剖綫**。n 連通域引入 $n-1$ 个剖綫能够使原域变成单連通域。

給定任意两个非空的点集 A, B 时，取滿足 $a\in A$, $b\in B$ 的一对点 a, b，考察它們中間的距离 $\rho(a, b)$，这样的 $\rho(a, b)$ 的下确界叫做 ***A*, *B* 間的距离**，用 $\rho(A, B)$ 表示。


图 2.3

$$\rho(A, B)=\inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}} \rho(a, b).$$

A, B 的公共部分(交集) $A\cap B$ 是空集时，叫做 A, B **互斥**。对两个紧緻的非空的互斥的集 A, B 常有

$$\rho(A, B)>0.$$

考虑了点列的极限以后，无穷級数的收斂发散的定义完全和实数的情形一样，即給定級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n=z_1+z_2+\cdots+z_n+\cdots, \tag{2.3}$$

对于任一个自然 k

$$A_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_k,$$

叫做无穷級数(2.3)的**部分和**。如果 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$ 存在且为有穷的复数，就叫做无穷級数(2.3)为**收斂**，相反的情形叫做**发散**。对于收斂的級数 A_k，从而 $z_k = A_k - A_{k-1}$ 为有界，更由于 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$ 为有穷，故

$$\lim_{k\to\infty} z_k = \lim_{k\to\infty} A_k - \lim_{k\to\infty} A_{k-1} = 0.$$

3) **复数球面** 复数的几何表示的第二方法可考虑**复数球面**。这是把 Gauss 平面映射到球面的方法。方法本身却产生在复数之前，远在古时的希腊时代 Ptolemy 的世界地图制作就知道用这一方法。

命 Gauss 平面在原点 $z=0$ 处与半徑为 $\frac{1}{2}$ 的球相切。为了帮助理解，这一球面看作是地球，并且引用地球的术語，切点 S 为南极。

在空間取直交坐标 (X, Y, Z)，X 坐标及 Y 坐标各与 Gauss 平面上的实軸、虚軸一致，Z 軸与球的交点为南极 S，即原点，北极 N 的坐标为 $(0, 0, 1)$。

今于 Gauss 平面上的任一点 Q 用 $z = x + iy$ 表示，这一点和北极 N 的連綫与球除相交于 N 外，还与球有另一交点，命这一交点为 P，坐标为 (X, Y, Z)。

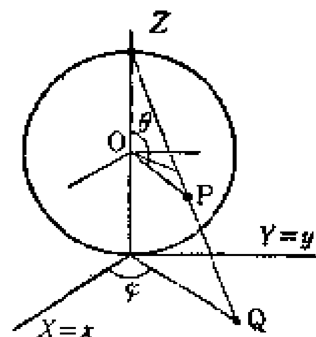


图 2.4

求 (X, Y, Z) 与 (x, y) 的关系是比較簡单的。事实上球的中心 O 为 $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$，因为半徑为 $\frac{1}{2}$，故球面方程为

$$X^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \tag{2.4}$$

即

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = Z. \tag{2.5}$$

其次連 Q $(x, y, 0)$ 及 N $(0, 0, 1)$ 的直綫，由于它的方向系数为 $(x, y, -1)$，故其方程为

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z-1}{-1}. \tag{2.6}$$

由(2.6)直接可求出 x, y 关于 X, Y, Z 的表达式为

$$x=\frac{X}{1-Z}, \quad y=\frac{Y}{1-Z}. \tag{2.7}$$

由此注意到 P 点在球面上，得出 NQ 的长的平方为

$$\overline{\mathrm{NQ}}^2=x^2+y^2+1=\frac{X^2+Y^2+(1-Z)^2}{(1-Z)^2}=\frac{1}{1-Z}.$$

由(2.6)也可求出 X, Y, Z 关于 x, y 的表达式为

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{x}{1+x^2+y^2}=\frac{1}{2}\,\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}},\\ Y&=\frac{y}{1+x^2+y^2}=\frac{1}{2i}\,\frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}},\\ Z&=\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}=\frac{z\bar{z}}{1+z\bar{z}}. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

这样的映射后来在比利时人 von Aiguillon 于 1613 年出版的光学书中曾应用过，在那里叫做**球极射影**(stereo-graphic projection)。

球极射影的重要性质为

定理 1 球极射影把 Gauss 平面上的圓或直綫与球面上的圓对应，即它們具有圓圓对应的关系。

証明 Gauss 平面上的圓或直綫的方程的一般形式为

$$a(x^2+y^2)+2bx+2cy+d=0,$$

其中 a, b, c, d 为实常数，圓的半徑为

$$\sqrt{b^2+c^2-ad}\,/\,|a|.$$

把(2.7)中 x, y 的值代入得

$$(a-d)Z+2bX+2cY+d=0,$$

即 Gauss 平面上圓的象在一平面上。

根据(2.8)球面的方程,可用含两个变数的三个实函数表示出来,即一般的可写成

$$X=X(x, y), \quad Y=Y(x, y), \quad Z=Z(x, y). \tag{2.9}$$

Gauss 分别作出变数 x, y 及变数 X, Y, Z 的綫素,即

$$\left.\begin{array}{c}(dS)^2=(dX)^2+(dY)^2+(dZ)^2, \\ (ds)^2=(dx)^2+(dy)^2,\end{array}\right\} \tag{2.10}$$

然后再把(2.9)代入。事实上,假定 X, Y, Z 可能全微分,则

$$\left.\begin{array}{l}dX=\dfrac{\partial X}{\partial x} dx+\dfrac{\partial X}{\partial y} dy, \\ dY=\dfrac{\partial Y}{\partial x} dx+\dfrac{\partial Y}{\partial y} dy, \\ dZ=\dfrac{\partial Z}{\partial x} dx+\dfrac{\partial Z}{\partial y} dy,\end{array}\right\} \tag{2.11}$$

把它代入(2.10)得

$$\left.\begin{array}{l}(dS)^2=E(dx)^2+Fdxdy+G(dy)^2, \\ E=\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial Z}{\partial x}\right)^2, \\ F=\dfrac{\partial X}{\partial x} \dfrac{\partial X}{\partial y}+\dfrac{\partial Y}{\partial x} \dfrac{\partial Y}{\partial y}+\dfrac{\partial Z}{\partial x} \dfrac{\partial Z}{\partial y}, \\ G=\left(\dfrac{\partial X}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial Y}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial Z}{\partial y}\right)^2.\end{array}\right\} \tag{2.12}$$

如果使这一对应在各点的邻域为一一对应,则其充要条件为:只要 $(dx)^2+(dy)^2>0$ 则 $(dS)^2>0$。用微分形式(2.12)具有正的确定符号来表示这一事实,我們現今假定它满足这一条件。

今于 Gauss 平面上取相交于 $z_0=x_0+iy_0$ 的两光滑曲綫 C_1, C_2, 命其方程各为

$$\left.\begin{array}{ll}x=x_i(t), \quad y=y_i(t) & (0\leqslant t\leqslant 1), \\ x_i(0)=x_0, \quad y_i(0)=y_0 & (i=1, 2),\end{array}\right\} \tag{2.13}$$

这些曲綫由(2.9)各映射为曲面上的曲綫 Γ_1, Γ_2, 它們的方程由

(2.9)具有以下的形状：

$$\left.\begin{aligned}&X=X_i(t)=X(x_i(t),\ y_i(t)),\ X_0=X_1(0)=X_2(0),\\&Y=Y_i(t)=Y(x_i(t),\ y_i(t)),\quad Y_0=Y_1(0)=Y_2(0),\\&Z=Z_i(t)=Z(x_i(t),\ y_i(t)),\quad Z_0=Z_1(0)=Z_2(0).\end{aligned}\right\}\tag{2.14}$$

曲綫Γ_1, Γ_2在点(X_0, Y_0, Z_0)相交，在交点处切綫的方程各为

$$\frac{X-X_0}{X_i'}=\frac{Y-Y_0}{Y_i'}=\frac{Z-Z_0}{Z_i'}$$

$$\left(i=1,\ 2,\quad X_i'=\left(\frac{dX_i}{dt}\right)_{t=0},\ \text{等}\right).$$

两切綫的交角Θ由下式給出：

$$\cos\Theta=L_1L_2+M_1M_2+N_1N_2\tag{2.15}$$

(其中$L_i=X_i'/A$, $M_i=Y_i'/A$, $N_i=Z_i'/A$,

$A=\sqrt{X_i'^2+Y_i'^2+Z_i'^2}$，由(2.12)的假定$A\neq0$)。

因为$X_i'=\dfrac{\partial X}{\partial x}x_i'+\dfrac{\partial X}{\partial y}y_i'$等，$x_i'=\left(\dfrac{dx_i}{dt}\right)_{t=t_0}$等，代入(2.15)并整理得

$$\cos\Theta=\frac{Ex_1'x_2'+F(x_1'y_2'+x_2'y_1')+Gy_1'y_2'}{\sqrt{Ex_1'^2+2Fx_1'y_1'+Gy_1'^2}\sqrt{Ex_2'^2+2Fx_2'y_2'+Gy_2'^2}}.\tag{2.16}$$

C_1,C_2关于Z_0的交角θ为这一式的特殊情形，即(2.9)变为$X=x$, $Y=y$, $Z=0$的情形，这时显然有$E=G=1$, $F=0$，故有

$$\cos\theta=\frac{x_1'x_2'+y_1'y_2'}{\sqrt{x_1'^2+y_1'^2}\sqrt{x_2'^2+y_2'^2}}.\tag{2.17}$$

作了以上的准备后，为了使經常有$\Theta=\theta$，换句話說，为了得出映射为**共形**(conformal)的条件，特别地命$x_1'\neq0$, $y_2'\neq0$, $x_2'=0$, $y_1'=0$。由(2.17)得$\cos\theta=0$，由于$\Theta=\theta$，故$\cos\Theta=0$。故由(2.16)有$Fx_1'y_2'=0$，即$F=0$。

另外，特别地命$x_1'x_2'+y_1'y_2'=0$, $x_1'\neq0$, $x_2'\neq0$，則由(2.17)仍然有$\cos\theta=0$，因此由于$\Theta=\theta$，故$\cos\Theta=0$。故由(2.16)有

$$(E-G)x_1'x_2'=0, \quad 即 \quad E=G.$$

反之,命 $F=0$, $E=G$, 则由于(2.16)与(2.17)为一致,故有 $\cos\Theta=\cos\theta$.

定理2 变换(2.9)为正的确定符号,它具有共形性的充要条件为(2.12)具有以下的形状:

$$dS^2=E[(dx)^2+(dy)^2] \quad (E>0). \tag{2.18}$$

今取球面上两点 $P_1=(X_1, Y_1, Z_1)$, $P_2=(X_2, Y_2, Z_2)$, 其間的距离 S 由(2.8)为

$$S^2=\overline{P_1P_2}^2=(X_1-X_2)^2+(Y_1-Y_2)^2+(Z_1-Z_2)^2$$

$$=\frac{|z_1-z_2|^2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)},$$

其中 z_1, z_2 各为 P_1, P_2 在 Gauss 平面上的对应点。命 $z_2=x+iy$, z_1 趋于 z_2, 上式仍然不变,故有

$$(dS)^2=\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}[(dx)^2+(dy)^2]. \tag{2.19}$$

由于这一式是(2.18)的特殊情形,故

定理3 球极射影除去北极外,对于其他的所有点与 Gauss 平面上的点为一一对应,并且是共形映射。

球极射影把球面上的点映射到 Gauss 平面上,其中只有一个例外点,即北极。Gauss 平面上的点 Q 与原点无限地远离时,和 Q 对应的球面上的点 P 就与北极接近。这时我們承认有**无穷远点**。今后用 $z=\infty$ 表示这一点,而用北极和它对应,这样我們考察的球极射影就沒有例外点了,有人把它叫做 Riemann 球或**数球面**,但我們把它叫做**复数球面**。

4) **Mercator 射影** 不用 Gauss 平面的全体而只取其中的 $0\leq x<2\pi$, $-\infty<y<+\infty$ 的部分,令实軸 $y=0$ 的那部分与赤道一致,卷成圆筒圍住地球,使球面上的点和平面上述部分的点成

为一一对应且为共形映射，这是 Kremer 于 1569 年发明的。他用这方法制作了地图，因为他是用拉丁文署名 Mercator 发表的，故这方法叫作 Mercator 射影。

在他的地图中，方向一定的航路(loxodromic line)要求在地图上为直綫。先就正确的南方(或北方)指向的航路考察时，这是經度为一定的航路，卽子午綫必須是与表示赤道的实軸正交的直綫。其次就正确的东方(或西方)指向的航路考察时，这是緯度为一定的航路，因为它常与子午綫正交，故必須为与 y 軸正交的直綫。

今命地球的半徑为 1，地球上一点的直交坐标为 X, Y, Z，命其經度、緯度为 (φ, θ)，若这一点与地图上的点 (x, y) 对应，首先得出关系

$$x=\varphi.$$

(X, Y, Z) 及 (φ, θ) 中間的关系已熟知为

$$\left.\begin{aligned} X&=\cos\theta\cos\varphi, \\ Y&=\cos\theta\sin\varphi, \\ Z&=\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

由此得

$$\begin{aligned}(dS)^2&=(dX)^2+(dY)^2+(dZ)^2 \\ &=(d\theta)^2+\cos^2\theta\,(d\varphi)^2.\end{aligned} \tag{2.21}$$

在平面上显然有

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2=(d\varphi)^2+(dy)^2.$$

故根据上面的定理 3，为了使映射是共形的，只要

$$(dS)^2=(d\theta)^2+\cos^2\theta\,(d\varphi)^2=E(\varphi, y)\{(d\varphi)^2+(dy)^2\},$$

$$E(\varphi, y)>0$$

就够了。換句話說，由

$$E(\varphi, y)=\cos^2\theta, \quad \text{卽} \quad (d\theta)^2=\cos^2\theta\,(dy)^2$$

以确定 $y=y(\theta)$ 就够了。这里有

$$d\theta=\cos\theta dy. \tag{2.22}$$

两端积分以求 y (由于 $\theta=0$ 表示赤道,故 $y(0)=0$)

$$y=\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos\theta} \quad (命\ t=\sin\theta)$$

$$=\int_0^{\sin\theta}\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta},$$

故最后有

$$y=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}, \quad x=\varphi. \tag{2.23}$$

这就得出了 Mercator 的射影公式,不过北极及南极在平面上不出現。

§3 綫性函数

1) 綫性函数的标准形分解 为了熟习处理复数,考察綫性函数的理論較为方便。具以下形状的函数

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \tag{3.1}$$

叫做 w 是 z 的綫性函数,其中 a, b, c, d 为复数常数,是这一綫性函数的**系数**。w 是与 z 无关的常数的充要条件是 $ad-bc=0$. 因此我們經常假定以下的附帶条件:

$$\Delta=ad-bc\neq 0. \tag{3.2}$$

特别需要强調这一条件时,叫做**非奇异**(non-singular)綫性函数。

綫性函数(3.1)經常可以用几个所謂**标准形**(normal form)的簡单綫性函数的組合表示出来。下面就考察把給定的綫性函数分解为标准形的方法。

第一种情形: $c\neq 0$ 时,

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{az+\frac{ad}{c}+b-\frac{ad}{c}}{c\left(z+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a\left(z+\frac{d}{c}\right)+\left(b-\frac{ad}{c}\right)}{c\left(z+\frac{d}{c}\right)}$$

$$=\frac{a}{c}+\left(\frac{bc-ad}{c^2}\right)\Big/\left(z+\frac{d}{c}\right).$$

即把 $w_1=z+\frac{d}{c}$, $w_2=\frac{1}{w_1}$, $w_3=\frac{bc-ad}{c^2}w_2$, $w=w_3+\frac{a}{c}$ 結合后，由 z 即可移到 w。

第二种情形：$c=0$ 时，这一情形再考虑到 $\Delta\neq0$ 显然有 $d\neq0$。故

$$w=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d},$$

即更簡单地由

$$w_1=\frac{a}{d}z,\quad w=w_1+\frac{b}{d}$$

把 z 移到 w。由以上的考察結果知綫性函数的标准形采用以下的三种：

$$\text{(I)}\ w=z+h,\quad \text{(II)}\ w=kz\,(k\neq0),\quad \text{(III)}\ w=\frac{1}{z}$$

(其中 h 及 k 为复数常数)就可以了。現在来討論这些标准形綫性变换的**几何意义**。第(I)形显然是 Gauss 平面上的各点 z 作向量 h 的**平移**即达到 w。为了作出第(II)形，命 $k=Re^{i\theta}$, $0<R<+\infty$, $-\infty<\theta<+\infty$。因此(II)可分解为

$$(\text{II}_1)\ w=Rz\,(R>0);\quad (\text{II}_2)\ w=e^{i\theta}z\,(-\infty<\theta<+\infty).$$

(II_1)叫做**伸縮**(dilatation)，z 描繪的图形由(II_1) w 平面也画出相似的图形，它們的相似比为 R，$R>1$ 时为扩大，$R<1$ 时为縮小。这种变换不是任意的相似变换，只是不改变图形方向的相似变换。(II_2)为繞原点的**旋轉**，旋轉的角度为 θ。

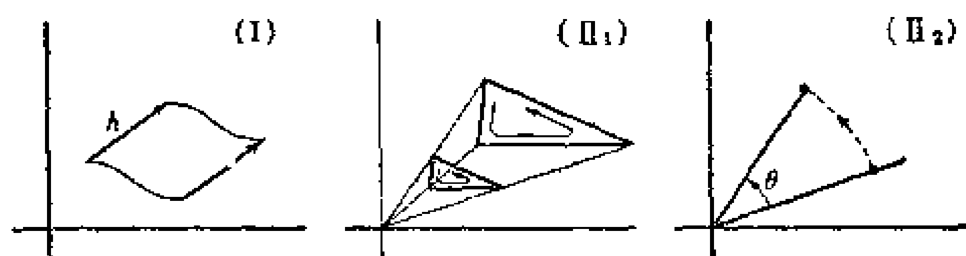


图 3.1

第(III)形由几何的考察又可分为以下两种变换：

$$(\mathrm{III}_1)\ w=\bar{z};\quad (\mathrm{III}_2)\ w=\frac{1}{\bar{z}}.$$

(III_1) 把 z 移到关于实軸为对称的点 $\bar{z}$. 在 (III_2) 中命 $z=re^{i\theta}$ $(0\leqslant r<+\infty, 0\leqslant\theta<2\pi)$，則 z 移到 $w=\frac{1}{r}e^{i\theta}$，幅角反而不变，这是关于单位圓的**反演变换**。

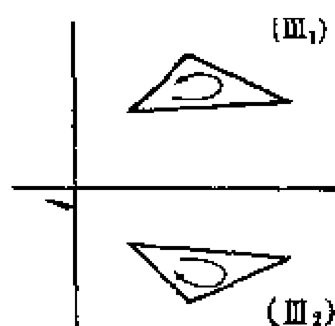


图 3.2

所以綫性变换的几何意义可以分解为以下五种：(1°)平移，(2°)旋轉，(3°)伸縮，(4°)对称，(5°)反演。(1°)，(2°)，(3°)不改变图形的方向；(4°)，(5°)一定改变图形的方向。由这一观点出发，命

(1_1°) $w_1=2h-e^{2i\theta_0}\bar{z}$,

(1_2°) $w=3h-e^{2i\theta_0}\bar{w}_1$

(其中 θ_0 表示 h 的幅角)。連續施行这两个变换，把(1_1°)中的 w_1 代入(1_2°)，得出 $w=z+h$，故(1°)又可分解为(1_1°)及(1_2°). 今过 h 点作直綫 L 与 $\mathbf{O}\boldsymbol{h}$ 正交，則 L 的方向系数为 $\theta=\theta_0+\frac{\pi}{2}$，故$(1_1^\circ)$还可以写成

$$w=e^{i\theta}\overline{\{e^{-i\theta}(z-h)\}}+h.$$

这是把 h 移到原点，旋轉 θ 角以作其对称，再送回原位置，所以这就表明(1_1°)是关于**直綫 L 的对称变换**。同样，(1_2°)为关于通过 $\frac{2}{3}h$ 点而与 L 平行的直綫 L' 的对称变换。

其次，旋轉(2°)也可分解为以下的两个**綫性对称变换**：

$$(2_1^\circ)\quad w_1=e^{2i\theta}\bar{z},\qquad (2_2^\circ)\quad w=e^{3i\theta}\bar{w}_1.$$

这是两个对称变换，对称軸各为与实軸交角为 θ 及 $\frac{3}{2}\theta$ 的直綫。

最后，伸縮(3°)也可以分解为

$$(3_1^\circ)\quad w_1=\frac{1}{\bar{z}},\qquad (3_2^\circ)\quad w=\frac{(\sqrt{R})^2}{\bar{w}_1}.$$

(3_2°)是关于以原点为中心，$\sqrt{R}$ 为半徑的圓的反演变换。故有

定理1 任意的非奇异的綫性变换为以下两类变换的有穷个結合而成，即：(1)关于直綫的对称变换，(2)关于圓的反演变换。

所以对于上述变换(1)，(2)不变的性质全是綫性变换不变的性质。再就以上所述加以考察。綫性变换最后分解为(1)以及(2)的个数，如果(III)出现的个数为奇数，則(1)，(2)各具有奇数个，(III)出現偶数个，則(1)，(2)亦各为偶数个。但是有趣的是最后結果的逆也成立：即任意个(1)及(2)的組合，或者(1)，(2)都有奇数个，或者都有偶数个，其結果都是綫性变换。想要对此加以証明，应当先考察綫性函数群的特性。

2) **綫性函数群的性质** 今取两个非奇异綫性函数，

$$w=\frac{az+b}{cz+d},\qquad \Delta=ad-bc\neq 0,$$

$$w^*=\frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta},\qquad \Delta^*=\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0,$$

作出它們的复合函数 $w^*=w^*(w(z))$，

$$w^*=\frac{(\alpha a+\beta c)z+(\alpha b+\beta d)}{(\gamma a+\delta c)z+(\gamma b+\delta d)}. \tag{3.3}$$

这一变换的系数可用矩陣計算得出

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a+\beta c & \alpha b+\beta d\\ \gamma a+\delta c & \gamma b+\delta d\end{pmatrix},$$

故(3.3)的行列式为

$$\Delta\cdot\Delta^*=(ad-bc)(\alpha\delta-\beta\gamma)\neq 0. \tag{3.4}$$

因此非奇异的綫性函数的全体，以作复合函数为群运算时，知道它具有**群的性质**。由复合函数的定义，显然知道这个运算满足**結合律**。将(3.1)用矩陣表示：

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

命 $a=d=1$，$b=c=0$，则得出单位，但单位不确定，因凡 $a=d\neq 0$，$b=c=0$ 的全体都是单位，把(3.1)关于 z 解出

$$z=\frac{-dw+b}{cw-a}, \tag{3.6}$$

由此知逆元存在。逆元的行列式与(3.2)一致。故

定理 2 非奇异綫性函数的全体构成一群。

由以上的說明知道，这个群虽可以用矩陣(3.5)表示，但这表示法并不是唯一的。这是由于 a, b, c, d 用同一复数(不能为0)乘时仍然表示同一个函数，可是(3.5)就改变了。因之，特别要求表示是唯一的时候，可附以例如 $\Delta=ad-bc=1$ 的条件。

在以上的表示法中，关于直綫的对称变换(1)的一般形状为

$$w=2h-e^{2i\theta_0}\bar{z}, \quad h=|h|e^{i\theta_0}$$

(其中 $h=0$ 时，θ_0 亦妥为确定之)。

将独立变数 z 移至 $\bar{z}$，它就是一个綫性函数，它的矩陣及行列式为

$$\begin{pmatrix} -e^{2i\theta_0} & 2h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta=-e^{2i\theta_0},$$

且 $\Delta\neq 0$. 其次，关于圆的反演变换(2)，若命圆的中心为 α，半徑为 $r\,(r>0)$，因为

$$w_1=w-\alpha, \quad z_1=z-\alpha, \quad w_1=\frac{r^2}{\bar{z}_1},$$

故

$$w=\frac{\alpha\bar{z}+(r^2-\alpha\bar{\alpha})}{\bar{z}-\bar{\alpha}}.$$

将独立变数由 z 移至 $\bar{z}$，这仍是一个綫性函数，它的矩陣及行列式

各为

$$\begin{pmatrix} \alpha & r^2-\alpha\bar{\alpha} \\ 1 & -\bar{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad \Delta=-r^2,$$

仍然是非奇异变换 $\Delta\neq 0$. 因此就能証明

定理 3 (1), (2)两种变换, 总計共有偶数个时, 把这些变换結合后所得的变换常为非奇异的綫性变换。

这是由于变换的結合常滿足結合律,偶数个变换 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n}$ 的結合,順序不变更时为

$$A_1\cdot A_2\cdots A_{2n}=(A_1\cdot A_2)\cdot(A_3\cdot A_4)\cdots(A_{2n-1}\cdot A_{2n}).$$

其中 $(A_{i-1}\cdot A_i)$ 对于独立变数取了两次共軛复数, 故共軛消失, 結果为非奇异的綫性函数,于是,由定理 2 断定定理 3 成立。

3) 关于綫性变换几何学的不变性 (i) 圆圆对应

定理 4 非奇异綫性变换把 z 平面上的圓或直綫变成 w 平面上的圓或直綫。

証明 对称变换把直綫变为直綫, 圓变为圓。 反演变换也把圓或直綫变成圓或直綫,这时通过圆的中心的圓变或直綫,故定理 4 成立。上面的証明是应用初等几何的結果,直接由复数計算証明时,考察 Gauss 平面上的圓或直綫的方程

$$a(x^2+y^2)+2bx+2cy+d=0, \tag{3.7}$$

其中 a, b, c, d 为实数,且 $b^2+c^2>ad$. 或

$$Az\bar{z}+Bz+\bar{B}\bar{z}+C=0, \tag{3.8}$$

其中 A, C 为实数, $B\bar{B}>AC$. 然后把 1) 中給出的变换式代入即可得出。

(ii) 对称原理 (principle of reflexion) 关于給定直綫 L 对称的两点叫做关于 L 的对称点对,类似的关于給定的圓 C 为反演的两点叫做关于 C 的对称点对。

定理 5 (对称原理) 若綫性变换 $w=w(z)$ 把 z 平面上的圓或

直綫 S 变成 w 平面上的圓或直綫 S'，則关于 S 为对称点对的两点 z_1，z_2 变为关于 S' 为对称点对的两点 w_1，w_2。

証明 只証明关于直綫 L 的对称变換，以及关于圓 C 的反演变換这一原理成立就够了。对于前者显然知道这一原理成立，因此只証明后者就够了。这一情形，可以不失普遍性地使圓 C 的中心在原点，故反演变换为

$$w=r^2/\bar{z}\quad(r>0). \tag{3.9}$$

命两点 z_1，z_2 关于圓或直綫 S 为对称，S 的方程为(3.8)．当 $A\neq 0$ 时，(3.8)表示一个圓，它的中心及半徑各为

$$\alpha=-\frac{\bar{B}}{A},\qquad R=\sqrt{\frac{B\bar{B}-AC}{A^2}}. \tag{3.10}$$

因为 z_1，z_2 关于这一圓为对称，故

$$z_1-\alpha=R^2/(\bar{z}_2-\bar{\alpha}). \tag{3.11}$$

将(3.10)代入(3.11)，得

$$Az_1\bar{z}_2+Bz_1+\bar{B}\bar{z}_2+C=0. \tag{3.12}$$

这一方程在(3.10)的假定下和(3.11)是等价的，故(3.12)表示 z_1，z_2 关于(3.8)为反演的充要条件。当 $A=0$ 时，命 $B=b-ic$，$C=d$，則(3.8)成为直綫

$$2bx+2cy+d=0. \tag{3.13}$$

这时(3.12)表明向量 z_1-z_2 和(3.13)正交，且由 z_1 及 z_2 到(3.13)的垂直距离相等。故当 $A=0$ 时，(3.12)仍然是 z_1，z_2 关于(3.8)为对称的充要条件。

作了以上的准备后，就容易証明定理5了。将

$$w_1=\frac{r^2}{\bar{z}_1},\qquad w_2=\frac{r^2}{\bar{z}_2},\qquad w=\frac{r^2}{\bar{z}} \tag{3.14}$$

代入(3.12)及(3.8)，得

$$Cw_1\bar{w}_2+Br^2w_1+\bar{B}r^2\bar{w}_2+Ar^4=0,$$

及

$$C w\bar{w}+B r^2 w+\bar{B} r^2 \bar{w}+A r^4=0.$$

这就表明 w_1, w_2 是关于最后方程所表示的圆或直綫为对称。

(iii) 非調和比(anharmonic ratio) 給定Gauss平面上具有指定順序互异的四点 z_1, z_2, z_3, z_4, 則以下的量:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4)=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4} \tag{3.15}$$

叫做点組 z_1, z_2, z_3, z_4 的**非調和比**。这一概念在复数球面上考察, 若四点中某一个例如 $z_1=\infty$, 則这时包含 z_1 的項可用 1 代替, 即命

$$(\infty, z_2, z_3, z_4)=\frac{1}{z_2-z_3}:\frac{1}{z_2-z_4}. \tag{3.16}$$

其他的情况也是一样。

定理 6 四点的非調和比关于綫性变换为不变量。

証明 只就三种变换

$$\text{(I)}\ w=z+h, \quad \text{(II)}\ w=kz\,(k\neq 0), \quad \text{(III)}\ w=\frac{1}{z}$$

計算(3.15)及(3.16)就够了。例如把(I)施行到(3.15), 有

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}=\frac{(z_1+h)-(z_3+h)}{(z_2+h)-(z_3+h)}:\frac{(z_1+h)-(z_4+h)}{(z_2+h)-(z_4+h)}.$$

应用定理 6 可以証明以下定理。

定理 7 若复数球面上給定了互异两組(每組 3 个)点(z_1, z_2, z_3) 及 (w_1, w_2, w_3), 則把 z_i $(i=1, 2, 3)$ 各移至 w_i 的綫性变换只有一个。

証明 今在复数球面上取与 z_1, z_2, z_3 互异的点 z, 考察以下的等式:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}, \tag{3.17}$$

其中 7 个点 z, z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3 中任何一点等于 ∞ 时, 这一

点所在的项用 1 代替。这是 w 的一次方程，只在根不是有限数值的时候，令 $w=\infty$，于是，把根 w 看作 z 的函数，即可化成(3.1)的形状。当 $z=z_i(i=1,2,3)$ 时命 $w=w_i$，故这一綫性式在球面上的任何点都成立，由于这綫性式不等于一个常数，故它的行列式 Δ 不能为零。反之，假定有綫性变换存在，則由定理 6 它使非調和比为不变，因此必須滿足(3.17)，从而与上述的解一致。

(iv) 共形映射(Conformal representation) 一般映射中的共形映射是光滑曲綫在某点相交时，定义其交角，利用交角来定义的。对于綫性变换，則由定理 4 知道它具有圆圆对应的性质，故光滑曲綫可以取为圆(包含直綫的特别情形)。令两圆的交点为 p_1，p_2，过 p_1 及 p_2 各作圆的切綫，則在 p_1 点圆的切綫的夹角与在 p_2 点圆的切綫的夹角相等。这样的角就叫做**两圆的交角**。两圆相切于一点时叫做两圆所成的角为 0 (或 π)。这些交角对于綫性变换为不变。这是由于：对于(I) $w=z+h$，显然知道是图形的平移；对于(II) $w=kz(k\neq 0)$，图形为相似变换；对于(III) $w=1/z$，图形为在复数球面上繞以 $z=1, z=-1$ 連綫为軸的旋轉。对于这三种情形，夹角都不变。故对于把 z_0 移到 w_0 的綫性变换(I)，(II)，(III)，假定以 z_0，z_1，z_2 作頂点的微小三角形的三頂点各移至 w_0，w_1，w_2，則三角形 z_0，z_1，z_2 的三边各移至三角形 w_0，w_1，w_2 的三边，但关于(I)及(III)两三角形为全同，关于(II)由于两三角形相似，故两三角形相当的内角相等。从而証明了下列定理。

定理 8 非奇异的綫性变换把复数球面的点无例外地，一对一地，共形映射到复数球面上。

4) **綫性函数关于不动点的分类** 給定非奇异綫性变换(3.1)时，滿足 $w(z)=z$ 的点叫做**不动点** (fixed points) 或**重点** (double points)。对于这样的点有 $z=(az+b)/(cz+d)$，或

$$cz^2+(d-a)z-b=0, \tag{3.18}$$

故一般的有两点存在。$c\neq 0$ 时，有

$$z=\frac{(a-d)\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c},\tag{3.19}$$

两点均为有穷。$c=0$ 时，由附带条件 $\Delta\neq 0$，故 $ad\neq 0$，从而 a 及 d 均不为零。$a\neq d$ 时，(3.18)的根为 $z=b/(d-a)$，另外一根可考虑为 $z=\infty$。当 $a=d$ 时，如果 $b\neq 0$，则两根可考虑均为 $z=\infty$。$b=0$ 时，则 $w=z$，故复数球面上的点全是不动点。因此可以分成以下的四种情形来研究：

第一种情形：不动点为互异两点且 $c\neq 0$。这时命两个不动点为 z_1, z_2，则 z_1 及 z_2 均为有穷。今再从 z 平面上取互异两点 z, z^*，假定 w 平面上点 w, w^* 和它对应，由于线性函数对非调和比为不变，故由 $w_1=w(z_1)=z_1$, $w_2=w(z_2)=z_2$ 有

$$\frac{z-z_1}{z^*-z_1}:\frac{z-z_2}{z^*-z_2}=\frac{w-z_1}{w^*-z_1}:\frac{w-z_2}{w^*-z_2}.\tag{3.20}$$

今命

$$K=\frac{z^*-z_2}{z^*-z_1}\cdot\frac{w^*-z_1}{w^*-z_2},\tag{3.21}$$

则由(3.20)把项适当掉换后，有

$$(w,\ z,\ z_1,\ z_2)=(w^*,\ z^*,z_1,\ z_2)=K.$$

故 K 为与 z^* 的取法无关的量，即只与 a, b, c, d 有关的有穷量。这叫做线性变换 (3.1) 的**乘数** (multiplier)。引用这一值，(3.20)可表为以下形状：

$$\frac{w-z_1}{w-z_2}=K\frac{z-z_1}{z-z_2}.\tag{3.22}$$

第二种情形：不动点为互异两点，但 $c=0$。命 z_1 为有穷，$z_2=\infty$。由前面所考虑的必有 $a\neq d$。今命 z^* 为异于 z_1 的有穷点，命 w 平面上的 w^* 和它对应，则

$$w^*=(az^*+b)/d,\quad z_1=(az_1+b)/d.$$

由第一式减第二式，得

$$K=\frac{w^*-z_1}{z^*-z_1}=\frac{a}{d}. \tag{3.23}$$

这样，K 仍然与 z^* 无关，也叫做(3.20)的乘数。引用它到(3.20)中，得出以下簡单表达式：

$$w-z_1=K(z-z_1). \tag{3.24}$$

第三种情形：不动点密合，但 $c\neq 0$. 这一不动点由(3.19)得

$$z_0=\frac{a-d}{2c}. \tag{3.25}$$

由于 $(a-d)^2+4bc=0$, $ad\neq bc$, 故 $a+d\neq 0$. 故命 $z_1^*=-d/c$, $z_2^*=\infty$, 則 z_1^*, z_2^* 常异于 z_0. 和它們对应的 w 的值为 $w_1^*=\infty$, $w_2^*=a/c$, 故

$$(z, z_1^*, \infty, z_0)=(w, \infty, w_2^*, z_0)$$

成立，把它用分数形式表达，則有

$$\frac{w-\frac{a}{c}}{w-z_0}=\frac{-\frac{d}{c}-z_0}{z-z_0}. \tag{3.26}$$

由(3.25)有 $-(d/c)-z_0=z_0-a/c=-\frac{a+d}{2c}$, 故由(3.26)的两端各减去1有

$$\frac{1}{w-z_0}=\frac{1}{z-z_0}+\frac{2c}{a+d}. \tag{3.27}$$

第四种情形：不动点密合且 $c=0$. 则由以上的考察不动点均为 $z_0=\infty$，这样系数之間有 $a=d\neq 0$, $b\neq 0$ 的关系，把这一关系代入(3.1)有

$$w=z+(b/d). \tag{3.28}$$

另外，$w=z$ 的情形，即**恒等变换**。这一情形在今后的討論中将略去不談。第三及第四情形叫做**抛物变换**，第一及第二情形由乘数 K 又可分为以下的三种：

(α)　$|K|=1, K\neq 1$ 的情形。这时(3.22)以及(3.24)叫做**椭圆变换**。由于(3.24)的討論和(3.22)类似，故只考察(3.22)就够了。首先由于 $|K|=1$，故可以写成 $K=e^{i\theta}$，这里 θ 是实数，且 $K\neq 1$，故 $\theta\neq 2n\pi$ $(n=0, \pm 1, \pm 2\cdots)$。其次，在(3.22)中命

$$U=\frac{w-z_1}{w-z_2},\quad u=\frac{z-z_1}{z-z_2}, \tag{3.29}$$

則(3.22)成为

$$U=e^{i\theta}u. \tag{3.30}$$

这表示圍繞原点旋轉 θ 角，在复数球面，是为圍繞南极 S 的旋轉，旋轉軸为 SN，当圍繞北极旋轉时則为左右反对的方向。命 u_0 固定，θ 滿足 $-\infty<\theta<+\infty$，則由此变换得出**不动圓周**。这样的圓周經过变换(3.30)后只是在它的本身上移动，因而得到这样的名称。不动圆周的內部以及外部都是**不动域**。对于(3.29)把 U，u 移到 w，z，則不动圆周表示成为

$$\frac{|z-z_1|}{|z-z_2|}=u_0, \tag{3.31}$$

这是 Appolonius 圆，它的极是 z_1 和 z_2，这一圆的內部及外部都是不动域。

(β)　$0<K<\infty$, $K\neq 1$ 的情形。这时(3.22)以及(3.24)叫做**双曲变换**。仍用(3.29)簡化后有

$$U=ru,\quad 0<r<+\infty,\ r\neq 1. \tag{3.32}$$

这是伸縮变换。求不动曲綫时命 u_0 固定，r 在 $0<r<+\infty$ 的范圍內变化。即不动曲綫为由原点出发的半射綫。用(3.29)变到 w，z 后为通过 z_1，z_2 的圓周而以 z_1，z_2 为端点的圓弧，当 u_0 在这一弧上时，把(3.32)反复施行 n 次 $(n=1, 2, \cdots)$，这样就得出 $U=r^n u_0$，因此假定 $r>1$ 則在半射綫上逐漸远离原点，若 $r<1$ 則逐漸趋近于0，即当 $r>1$ 时 z_1 为**源点**(source)，z_2 为**汇点**(sink)。

$r<1$ 时则相反。通过 z_1, z_2 的圆弧的内部以及外部显然都是不动域。

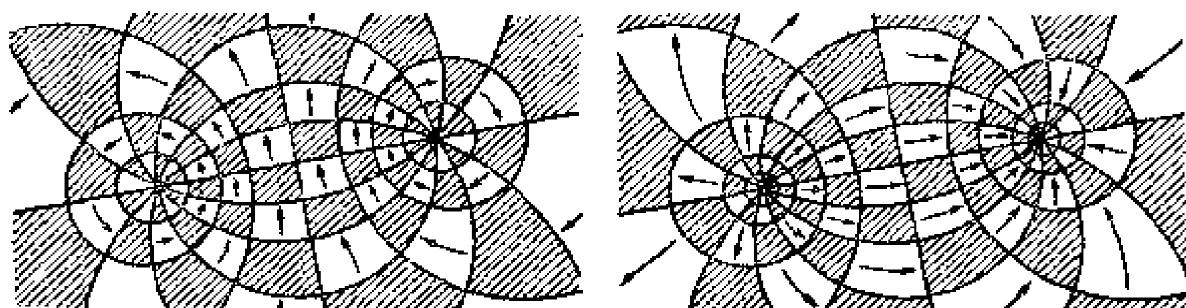


图 3.3

(γ) $K=re^{i\theta}$, $0<r<+\infty$, $r\neq 1$, $e^{i\theta}\neq 1$ 的情形。这一情形 (3.22) 以及 (3.24) 都叫做**斜駛变换** (loxodromic transformation)。这时仍应用 (3.29) 后，有

$$U=re^{i\theta}u. \tag{3.33}$$

为了求不动曲綫，把 (3.33) 重复施行 n 次，得

$$U_n=r^n e^{in\theta}u.$$

特别地，命 $u=1$，得 $|U_n|=r^n$, $\arg U_n=n\theta$，由两者消去 n，得

$$U=Re^{i\Theta}, \quad \log R=\left(\frac{\log r}{\theta}\right)\Theta,$$

这是**对数螺綫**。

在 Mercator 地图上恰好是倾斜为 $(\log r)/\theta$ 的直綫路程。不是 $u=1$ 的其他的情形都是平行直綫，这就是叫作斜駛的理由。

还有沒放进这一分类的抛物变换的情形，也可用同样的方法加以考察。这时給定的变换具有形式:

$$\frac{1}{w-z_0}=\frac{1}{z-z_0}+h. \tag{3.27}$$

命

$$U=\frac{1}{w-z_0}, \quad u=\frac{1}{z-z_0}, \tag{3.34}$$

则得出与 (3.28) 同样类型的变换

$$U=u+h, \quad h\neq 0. \tag{3.35}$$

不动曲线显然由

$$U=u_0+th \quad (-\infty<t<+\infty)$$

給出，这是一条直綫，当 u_0 变化时画出平行直綫。因此通过(3.34)回到(3.27)时，是为在 z_0 处相切，并且与通过 z_0 方向为向量 h 的直綫相切的圓，这样的圓周都是不动圓周，不动圓周包圍的部分为不动域。

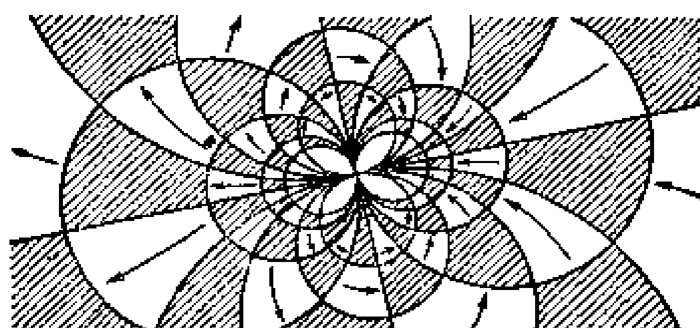


图 3.4

另外，乘数 K 可由以下簡单方法用(3.1)的系数 a, b, c, d 表示出来。首先命 $z^*=\infty$，则由于 $w^*=w(z^*)=a/c$，故

$$K=\frac{z^*-z_2}{z^*-z_1}\cdot\frac{w^*-z_1}{w^*-z_2}=\frac{a-cz_1}{a-cz_2}.$$

由二次方程根与系数的关系知 $z_1+z_2=(a-d)/c$，$z_1z_2=-b/c$，故有

$$K+\frac{1}{K}=\frac{a-cz_1}{a-cz_2}+\frac{a-cz_2}{a-cz_1}=\frac{2a^2-2ac(z_1+z_2)+c^2(z_1^2+z_2^2)}{a^2-ca(z_1+z_2)+c^2z_1z_2}$$

$$=\frac{(a+d)^2}{ad-bc}-2.$$

第2章 正则函数及初等函数

§4 复变函数及其連續性

1) 复变函数 Gauss 平面上或复数球面上点集 A 的各点 z，与 Gauss 平面或复数球面上的若干点 w（也可以考虑无穷个的情形）对应时，这一对应叫做 z 的**复变函数**，用記号

$$w=f(z), \quad z\in A \tag{4.1}$$

表示。z 叫做**自变数**，w 叫做**因变数**，A 叫做函数的**定义域**。这时把 z 及 w 的实部及虚部分开，可以写成以下的形状：

$$z=x+iy, \quad f(z)=u(x, y)+iv(x, y). \tag{4.2}$$

即給定一个自变数 z 的复变函数 $f(z)$，和給定两个自变数 x,y 的两个实变函数 $u(x,y)$，$v(x,y)$（具相同的定义域）是相同的。因变数所取的值所属的集叫做 $f(z)$ 的**值域**，特別地，z 属于 A 时，$w=f(z)$ 的全体叫做**純值域**。对于函数(4.1)，不論它的定义域或值域一般都是二維的集，故除去把(4.1)叫做函数外，还有很多人叫做**映象**或**变换**。由 A 及 $f(z)$ 不能决定值域，但是純值域則可由此二者完全确定。純值域叫做 A 关于 $f(z)$ 的**象**。另外自变数或因变数用一个字母表示时，則变数所属的 Gauss 平面或复数球面有人也叫做 z 平面，z 球，w 平面，w 球。只要不至于誤会，这个叫法确是很方便的。值域为实数的函数叫做**实值函数**。

在函数(4.1)中，对于一点 z，只有一点 w 和它对应时，$f(z)$ 叫做**单值函数**，相反的情形叫做**多值函数**。一般对于单值函数的研究比多值函数容易，故通常先从单值函数的研究开始。并且单值函数研究得到的結果，在多值函数研究里有用的情形也很多。为了这一目的，复变函数論采取了叫做解析开拓（参看第5章）的

特有的非常优秀的方法，可是不限于复变函数論的一般的方法是在 $f(z)$ 的值中适当的挑选一值，作出尽可能簡单的单值函数。这样的单值函数叫做它所在的多值函数的一个**分支**(branch)。

单值函数中，对于它的值域的各点 w 满足于 $w=f(z)$ 的 z 值最多不超过一个时，換句話說，只要 $z_1\neq z_2$; $z_1, z_2\in A$，則 $f(z_1)\neq f(z_2)$ 的时候，$f(z)$ 叫做在 A **单叶**(univalent 或 schlicht)。

2) **函数的极限值，函数的連續性** 在前章內已經詳細叙述了定义域及值域所属的 Gauss 平面及复数球面是具有拓扑的空間。因此单值函数的极限值、連續性等的定义已經是自明的了，不过为了愼重，不妨重复叙述如下。

z_0 是 A 的一个聚点的情形。$z_n\in A$

$$z_n\neq z_0,\ \text{只要}\ \lim_{n\to\infty} z_n=z_0,\ \lim_{n\to\infty} f(z_n)=\alpha$$

时，叫做 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 有**极限值** α. 其次，在 A 上定义的单值函数 $f(z)$，对于 $z_0\in A$ 的一点 z_0 及任意的正数 ε，有正数 δ，当

$$\rho(z, z_0)<\delta,\ z\in A,\ \text{則}\ \rho\{f(z), f(z_0)\}<\varepsilon\ \text{时}$$

叫做 $f(z)$ 在点 $z=z_0$ **連續**。其中 $\rho(a,b)$ 为 a,b 两点間的距离，A 在 Gauss 平面时 $\rho(a,b)=|a-b|$.

单值函数 $f(z)$ 的定义域中一点 a 不是 A 的孤立点的时候，$f(z)$ 在 $z=a$ 連續的充要条件为 $f(z)$ 在 $z=a$ 的极限值 $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 存在且等于 $f(a)$. 在 A 的所有点都連續的单值函数 $f(z)$ 叫做在 A 連續。

关于单值函数极限值的四則运算需要以下的条件：$f(z)$, $g(z)$ 是具有共同的定义域 A 的单值函数，a 为 A 的一个聚点，$\lim\limits_{z\to a} f(z)=\alpha$, $\lim\limits_{z\to a} g(z)=\beta$ 都存在。于是，当 $f(z)$，$g(z)$ 以及 α, β 都有穷时，則 $\lim\limits_{z\to a}\{f(z)+g(z)\}$ 及 $\lim\limits_{z\to a}\{f(z)\cdot g(z)\}$ 都存在，各等于 $\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$. 另外若 $g(z)\neq 0$, $\beta\neq 0$，則 $\lim\limits_{z\to a}\left\{\dfrac{f(z)}{g(z)}\right\}$ 存在且等

于 α/β。在复数球面上考察时，置 $\frac{1}{\infty}=0$，$\frac{1}{0}=\infty$，則 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=0$ 的充要条件为 $\lim\limits_{z\to z_0}\left\{\frac{1}{f(z)}\right\}=\infty$。

故在 Gauss 平面上取值的两个連續函数 $f(z)$，$g(z)$，由此作出的 $f(z)+g(z)$，$f(z)\cdot g(z)$ 也連續，$g(z)\neq 0$ 时 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 也是連續函数。对于在复数球面上取值的一个連續函数 $f(z)$，只要命 $\frac{1}{\infty}=0$，$\frac{1}{0}=\infty$，則 $\frac{1}{f(z)}$ 也是連續函数。

$f(z)$ 是 A 上的单值連續函数，特别 A 是緊集的时候(即 Gauss 平面上的有界閉集或复数球面上的閉集)，下列各定理成立。这虽然是复变函数論的定理，实际上也是拓扑空間的性质，可是在复变函数論內經常要用，故叙述如下。

定理 1 若定义于緊集 A 上的单值实值函数 $f(z)$ 在 A 連續，則 $f(z)$ 在 A 有界且在 A 取它的最大值及最小值。这里所謂函数在 A 为有界是指它的純值域为有界。

証明 由于緊集的連續象仍是緊集，A 关于 $f(z)$ 的象即 $f(z)$ 的純值域为实数軸上的緊集，即有界閉集。因为是有界集，故它的最大值及最小值均为有穷，因为是閉集，故它的值属于集(即純值域)內。

其次，在 A 上定义的单值函数 $f(z)$，对于給定的任意正数 ε，有只与 ε 有关而与 $z(z\in A)$ 无关的正数 δ 存在，对于 z_1，$z_2\in A$ 的二点 z_1，z_2，只要 $\rho(z_1, z_2)<\delta$，則 $\rho\{f(z_1), f(z_2)\}<\varepsilon$ 成立，于是 $f(z)$ 叫做在 A **上一致連續**。显然一致連續的函数是連續函数。在上述定义中，$\rho(z_1, z_2)$ 为 z_1，z_2 两点間的**距离**，但在 Gauss 平面上考虑和在复数球面上考虑应得出不同的結果。沒有指定是那一种情形时，則可认为任一种情形都可以。

例如当 A 为 $z\neq 0$，∞ 的所有 z 构成的集时，$f(z)=\frac{1}{z}$ 在 A 上

連續，在 Gauss 平面上考慮时非一致連續，但在复数球面上考慮时则为一致連續。反之，$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ (其中 $z=x+iy$) 在同一定义域 A 中虽为連續，但不論从 Gauss 平面或复数球面考慮都非一致連續。

对于連續及一致連續相同的情形有以下的定理。

定理 2　定义在緊集 A 上的单值連續函数在 A 上一致連續。

証明　今假定 $f(z)$ 在 A 上非一致連續，有一正数 ε，对于任意的 δ，例如对于 $\delta=\frac{1}{n}$，有二点 z_1^n, $z_2^n\in A$ 存在，使得

$$\rho(z_1^n, z_2^n)<\frac{1}{n} \text{ 且 } \rho\{f(z_1^n), f(z_2^n)\}\geqslant\varepsilon \tag{4.3}$$

成立。$n=1,2,\cdots$ 时，得出两个点列 z_1^n, z_2^n，由于 A 为緊集，故点列 $\{z_1^n\}$ 的子列 $\{z_1^{n_\nu}\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ 及 A 的一点 a 存在，使

$$\lim_{\nu\to\infty} z_1^{n_\nu}=a. \tag{4.4}$$

由 (4.3)，因为 $\rho(z_1^{n_\nu}, z_2^{n_\nu})<\frac{1}{n_\nu}$，故

$$\lim_{\nu\to\infty} z_2^{n_\nu}=a. \tag{4.5}$$

但因 $f(z)$ 在 a 为連續，故由 (4.4) 及 (4.5) 推出

$$\lim_{\nu\to\infty}\rho\{f(z_1^{n_\nu}), f(a)\}=0,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\rho\{f(z_2^{n_\nu}), f(a)\}=0.$$

再由

$$\rho\{f(z_1^{n_\nu}), f(z_2^{n_\nu})\}\leqslant\rho\{f(z_1^{n_\nu}), f(a)\}+\rho\{f(z_2^{n_\nu}), f(a)\}$$

得出

$$\lim_{\nu\to\infty}\rho\{f(z_1^{n_\nu}), f(z_2^{n_\nu})\}=0.$$

这与 (4.3) 的后一不等式

$$\rho\{f(z_1^{n_\nu}), f(z_2^{n_\nu})\}\geqslant\varepsilon \quad (\nu=1, 2, \cdots)$$

矛盾。

3) **函数列的极限** 对于各个自然数 $n=1,2,\cdots$，考察在同一定义域 A 上的单值函数 $f_n(z)$，它的全体叫做**函数列**，通常写作 $f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$，或更簡单地写作 $\{f_n(z)\}$。这时假定对于 $z\in A$ 的全体的 z，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)=f(z)$，則 $f(z)$ 叫做 $\{f_n(z)\}$ 的**极限函数**。这时对于任意的正数 ε，有自然数 $N=N(\varepsilon,z)$ 存在，当 $n>N$ 时有 $\rho\{f_n(z),f(z)\}<\varepsilon$，当 $N(\varepsilon,z)$ 选定只与 ε 有关而与 z 无关时，換句話說假定

$$\sup_{z\in A} N(\varepsilon,z)=N(\varepsilon)$$

为有穷，則叫做函数列 $\{f_n(z)\}$ 在 A **上一致收斂**于 $f(z)$。

定理 3 若函数列的各函数 $f_n(z)$ 在其定义域内为单值連續，且 $\{f_n(z)\}$ 一致收斂于它的极限函数 $f(z)$，則 $f(z)$ 在 A 上为連續。

証明 令命 z_0 为 A 的任一点，給定任一正数 ε，由于 $\{f_n(z)\}$ 为一致收斂，故有 $N=N(\varepsilon)$ 存在，当 $n>N$ 时有

$$\rho\{f_n(z),f(z)\}<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.6}$$

特別地，当 $z=z_0$ 时 (4.6) 仍然成立，故

$$\rho\{f_n(z_0),f(z_0)\}<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.7}$$

今选定滿足 $n>N$ 的 n，并且把它固定。因 $f_n(z)$ 为連續函数，故对于 ε 有正数 δ 存在，当 $\rho(z,z_0)<\delta$，$z\in A$ 时有

$$\rho\{f_n(z),f_n(z_0)\}<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.8}$$

另一方面，对于这样的 z (4.6) 也成立，故当 $\rho(z,z_0)<\delta$，$z\in A$ 时，由 (4.8)，(4.7)，(4.6) 有

$$\begin{aligned}\rho\{f(z),f(z_0)\}&\leqslant\rho\{f(z),f_n(z)\}+\rho\{f_n(z),f_n(z_0)\}\\&\quad+\rho\{f_n(z_0),f(z_0)\}\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

若函数列 $\{f_n(z)\}$ 的极限 $f(z)$ 的定义域 A 为开集，但能在含于 A 的任意緊子集 B 上$\{f_n(z)\}$一致收斂于 $f(z)$，則叫做$\{f_n(z)\}$**广义一致收斂**于 $f(z)$. 这时若 $\{f_n(z)\}$ 在 A 上連續，則 $f(z)$ 在 A 上也連續。这是由于 A 的每点 z，总有邻域 $V(z)$ 存在，而它的閉包 $\overline{V}(z)$ 为緊緻的。

給定 $f_n(z)$ 的函数列 $\{f_n(z)\}$，它們都是有窮值，考察由此构成的**函数項級数**

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z). \tag{4.9}$$

和常数項級数一样，它的部分和 $\sum_{n=1}^{k} f_n(z) = F_k(z)$ 的极限値 $\lim_{k\to\infty} F_k(z)$ 存在而有窮，則定义 (4.9) 为收斂，其他的情形叫做发散。使(4.9)为收斂的 z 的全体叫做(4.9)的**收斂域**。

$F_k(z)$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$在集 A 上一致收斂时，叫做級数(4.9)在 A 上一致收斂。

不論就函数列 $\{f_n(z)\}$ 或函数項級数 $\sum f_n(z)$ 来說，如果它在某一点集 A 上一致收斂，則在它的任意非空子集 B 上也一致收斂。另外它們在有窮个点集 $A_1, A_2, \cdots, A_l$ 上一致收斂时，則在它們的幷集 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_l$ 上也一致收斂。由此容易得出以下的結果。命級数 $\sum f_n(z)$ 的收斂域为 A，A 的开核不是空集时，对于 A 的內点 a 作半徑为 $\frac{1}{m}$ 的圓$(m=1,2,\cdots)$(或球帽)[1] $V_n(a)$，对于某一个 n，$\sum f_k(z)$在 $V_n(a)$ 上一致收斂的点 a 的全体叫作 B，則 $B \subseteq A$，$\sum f_n(z)$在 B 的任意(非空)緊子集上一致收斂。即 $\sum f_n(z)$ 在 B 上广义一致收斂，且 B 为开集，幷且 B 是具有两性质中的最大的点集。因此，称 B 为**广义一致收斂域**。現在来証明这些事实。

[1] 此处的球帽，即将 a 看作复数球面的点，以 a 为心，作小半徑的圓，圓周內球面的部分——校者注。

任取 B 的一个緊（非空）子集 M，对于 M 的各点 p，以 p 为中心 $\frac{1}{n(p)}$ 为半徑的圆（或球幅）存在，在它的内部 $\sum f_n(z)$ 一致收斂，命这一圆为 $V_n(p)$. 对于 M 的每点 p，作好上述的圆 $V_n(p)$，这样的圆的全部把 M 复盖。因为 M 是緊集，故可挑出有穷个这样的圆

$$V_{n_1}(p_1),\ V_{n_2}(p_2),\ \cdots,\ V_{n_\nu}(p_\nu)$$

把 M 复盖。如上面所注意的，在 $V_{n_1}(p_1)\cup\cdots\cup V_{n_\nu}(p_\nu)$ 上級数一致收斂，在它的子集 M 上也一致收斂，即級数 $\sum f_n(z)$ 在 B 广义一致收斂。其次，假定 B 不是最大的，还有比 B 大的开集 B_1，該級数在 B_1 上广义一致收斂。今命 p_1 为 B_1-B 的任一点，則 p_1 有邻域 $V_n(p_1)$，它的閉包（乃緊集）含于 B_1. 但因 $p_1\in B$，故在 $V_{n+1}(p_1)\ (\subseteq V_n(p_1))$ 上級数不是一致收斂，这是不合理的。

4) **冪級数** 作为函数項級数的例，考察冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots, \qquad (4.10)$$

其中 $c_n(n=0,1,\cdots)$ 及 a（有穷）是复数常数。这样形状的級数叫做**冪級数**，a 叫做它的**中心**，$c_n(n=0,1,2,\cdots)$ 叫做它的**系数**。

定理 4 假定冪級数(4.10)在某一复数 $z_0\neq a$ 收斂，則在滿足 $0\leqslant|z-a|<|z_0-a|$ 的所有 z 絕对收斂（因此假定在某一复数 z_0 发散，則在滿足 $|z-a|>|z_0-a|$ 的全体复数 z 均发散）。其次，在相同的假定下，对于滿足 $0<r<|z_0-a|$ 的任意正数 r，在閉圆盘 $0\leqslant|z-a|\leqslant r$ 上一致收斂。

証明 假定 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0-a)^n$ 收斂，且 $z_0\neq a$. 今取滿足 $0<r<|z_0-a|$ 的任意正数 r，在閉圆盘 $0\leqslant|z-a|\leqslant r$ 上如果能够証明以上的冪級数为絕对且一致收斂，則定理 4 全部証明。

今因 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0-a)^n$ 为收斂，則其一般項收斂于零（参看 §2 的 2)），数列 $c_n(z_0-a)^n$ 为有界，即对于全体的 $n(n=0,1,2\cdots)$ 有滿

足 $|c_n||z_0-a_n|^n<M<+\infty$ 的 M 存在，故

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n(z-a)^n|=\sum_{n=0}^{\infty}\left|c_n(z_0-a)^n\left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^n\right|$$
$$\leqslant M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n$$
$$\leqslant M\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{|z_0-a|}\right)^n.$$

最后的那个級数是与 z 无关的正常数项等比級数，它的公比由于 $0<r<|z_0-a|$，故

$$\frac{r}{|z_0-a|}<1,$$

即为收斂級数。但这是最初級数的优級数(majorant)，故(4.10)在指定的圓上絕对且一致收斂。

由定理4，給定任意幂級数(4.10)，考察使它收斂的 z（至少有一个 z 存在，$z=a$ 就是其中的一个）所作的 $|z-a|$，命这样的 $|z-a|$ 的上确界为 R，则 R 滿足 $0\leqslant R\leqslant+\infty$。圓盘 $|z-a|<R$ 含于 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 的絕对收斂域，且为幂級数的广义一致收斂域。这样的圓叫做这一幂級数的**收斂圓**，R 叫做**收斂半徑**。这样，对于幂級数虽然决定了它的广义一致收斂域，但对于收斂域 A 及絕对收斂域 D，则因在圓周 $|z-a|=R$ 上，絕对收斂点及收斂点的存在情况极为复杂，沒有一般的簡单規則。由定理4所知道的事实只是：若广义一致收斂域为 B，圓盘 $|z-a|<R$ 为 E，它的閉包为 $\overline{E}$，則下列关系成立：

$$B=E\subseteq D\subseteq A\subseteq\overline{E}.$$

但由此可断定幂級数在它的收斂圓内部表示連續函数。

§5　正 則 函 数

1) **导数**　以Gauss平面的一个开集 D 为定义域的复变函数

$w=f(z)$，在 D 的一点 z_0 的邻域有界，且极限值

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \tag{5.1}$$

存在有界时，则叫做 $f(z)$ 在 $z=z_0$ **是可导的**，用 $f'(z_0)$ 表示这一极限值，叫做 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 的**微分系数** (differential coefficient)。所以叫做微分系数的理由是这个定义可以换成以下的形式：即在 Gauss 平面的开集 D 上定义的单值函数 $f(z)$，在 D 内一点 z_0 有微分系数 $f'(z_0)$，是指在 z_0 的邻域，$f(z)$ 表示成

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\varphi(z,\ z_0) \tag{5.2}$$

的形状时，函数 $\varphi(z,\ z_0)$ 满足

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z,\ z_0)}{|z-z_0|}=0. \tag{5.3}$$

这个极限既是在 Gauss 平面的极限，因之，将 z 及 $f(z)$ 各分成实部及虚部，再較仔細地看一看定义的内容。今命

$$\left.\begin{aligned} &z=x+iy, \quad f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y),\\ &z_0=x_0+iy_0, \quad f'(z_0)=a+ib, \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

则(5.2)及(5.3)各成

$$\left.\begin{aligned} u(x,y)&=u(x_0,y_0)+a(x-x_0)-b(y-y_0)\\ &\qquad +\sigma(x,\ y,\ x_0,\ y_0),\\ v(x,y)&=v(x_0,y_0)+b(x-x_0)+a(y-y_0)\\ &\qquad +\tau(x,\ y,\ x_0,\ y_0), \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{\sigma(x,\ y,\ x_0,\ y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0,$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{\tau(x,\ y,\ x_0,\ y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0.$$

反之，由最后的四式作出 $u+iv$ 即可得出(5.2)及(5.3)，从而証明了下列定理。

定理 1 在 Gauss 平面的开集 D 上定义的单值函数 $f(z)$，在

D 内一点 z_0 可导的充要条件是：設 $z=x+iy$，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$z_0=x_0+iy_0$，两个2变数的实函数 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在 $x=x_0$，$y=y_0$ 可全微分，并且它的展开式的一次項为 $a(x-x_0)-b(y-y_0)$，$b(x-x_0)+a(y-y_0)$，其中 a，b 表示两个实数。

由于在展开式(5.5)中 a，$-b$，b，a 意味着

$$\left.\begin{aligned} a=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_0,\,y_0}; \quad -b=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x_0,\,y_0}; \\ b=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x_0,\,y_0}; \quad a=\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{x_0,\,y_0}. \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

所以 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处为可导时，四个偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$ 在 $x=x_0$，$y=y_0$ 存在，且在該点满足下列关系：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5.7}$$

(5.7)叫做 **Cauchy-Riemann 关系式**或叫做 **Cauchy-Riemann 微分方程。**

只要上列关系成立，并且 u，v 在 (x_0,y_0) 都可全微分，定理1就保証 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 为可导。今重述如

系　在 Gauss 平面的开集 D 上定义的单值函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，在 $z=z_0=x_0+iy_0$ 可导的充要条件是：$u(x,y)$，$v(x,y)$ 在 $x=x_0$，$y=y_0$ 都可全微分，且其偏导数 u_x，u_y，v_x，v_y 满足 Cauchy-Riemann 关系式

$$u_x=v_y, \quad u_y=-v_x.$$

其中"可全微分的充分条件"，就是"u_x，u_y，v_x，v_y 在 (x_0,y_0) 的邻域內所有的点都存在，有界，且在 (x_0,y_0) 連續"。事实上，在这种情况下，取点 (x_1,y_1) 为 (x_0,y_0) 邻域（以 (x_0,y_0) 为中心，充分小为半徑的圓）內的任一点，由中值定理有

$$u(x_1,y_1)=u(x_0,y_1)+\frac{\partial u}{\partial x}(\xi,y_1)(x_1-x_0)$$

$$(x_0 \leqslant \xi \leqslant x_1 \text{ 或 } x_1 \leqslant \xi \leqslant x_0),$$

$$u(x_0, y_1) = u(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, \eta)(y_1 - y_0)$$

$$(y_0 \leqslant \eta \leqslant y_1 \text{ 或 } y_1 \leqslant \eta \leqslant y_0).$$

把第二式代入第一式,得

$$u(x_1, y_1) = u(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y_1)(x_1 - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, \eta)(y_1 - y_0). \tag{5.8}$$

由 u_x, u_y 在 (x_0, y_0) 連續的假設,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y_1) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \sigma_1(x_1, y_1, x_0, y_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, \eta) &= \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \sigma_2(y_1, x_0, y_0), \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ y_1 \to y_0}} \sigma_1(x_1, y_1, x_0, y_0) = 0,$$

$$\lim_{y_1 \to y_0} \sigma_2(y_1, x_0, y_0) = 0,$$

故命

$$\sigma(x_1, y_1, x_0, y_0) = \sigma_1(x_1, y_1, x_0, y_0)(x - x_0) + \sigma_2(y_1, x_0, y_0)(y - y_0), \tag{5.10}$$

則

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ y_1 \to y_0}} \frac{\sigma(x_1, y_1, x_0, y_0)}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}} = 0. \tag{5.11}$$

把(5.9), (5.10)代入(5.8),則

$$u(x_1, y_1) = u(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)(y_1 - y_0) + \sigma(x_1, y_1, x_0, y_0). \tag{5.12}$$

(5.11), (5.12) 表示 $u(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可全微分,对于 $v(x, y)$

可作同样的考察。

为了考察 Cauchy-Riemann 关系式的意义，命

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(z_0+(x-x_0))-f(z_0)}{x-x_0},\\ \frac{\partial f}{\partial iy}&=\lim_{y\to y_0}\frac{f(z_0+i(y-y_0))-f(z_0)}{i(y-y_0)},\end{aligned}\right\}\tag{5.13}$$

于是

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial f}{\partial iy}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y},$$

故 Cauchy-Riemann 关系式可以写成

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial iy}.\tag{5.14}$$

但这一值由 (5.13) 的定义是沿过 (x_0, y_0) 与"实軸平行的直綫微分 $f(z)$ 的結果"，换句話說，"沿 x 軸方向微分 $f(z)$ 的結果等于沿平行于 y 軸的直綫微分 $f(z)$ 的結果"。并且在这样的方向上 dz 的意义各为 dx 及 diy，故由 (5.13) 知道 (5.14) 的两端都等于 $f'(z_0)$. 即"Cauchy-Riemann 的关系式为 $f(z)$ 对于两个直交的方向——x 方向及 y 方向——的微分系数相等"。故由上可知，只要对于这两个方向的微分系数相等，并且 u_x, u_y, v_x, v_y 在其邻域内的所有点都連續，則按 (5.1) 的微分系数存在，从而任何方向的微分系数都和这个值一致。

以上是将按 (5.1) 所給的复变函数微分系数分成实部及虛部考察的。如将 z 及 $w=f(z)$ 各看作一个变数考察时，常常給出簡洁的結果(这叫做**复变函数的一元性**)。例如关于微分的四則的法則就是，由 (5.2)，(5.3) 立刻得出下列定理。

定理 2　在 Gauss 平面的开集 D 上定义的两个单值(有穷)函数 $f(z)$，$g(z)$，若在 D 内的一点 z_0 是可导的，則下列函数 $F(z)$ 也在 z_0 可导，且

(1) $F(z)=f(z)\pm g(z)$ 时，則

$$F'(z_0)=f'(z_0)\pm g'(z_0).$$

(2) $F(z)=f(z)g(z)$ 时，則

$$F'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0).$$

(3) $F(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 时，有

$$F'(z_0)=\frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2} \quad (g(z_0)\neq 0).$$

对于复合函数，下列命题成立：$f(z)$ 是在开集 D 上，$g(w)$ 是在开集 $\varDelta$ 上定义的单值（有穷）函数。若 $f(z)$ 在 $z_0\in D$ 的 z_0，$g(w)$ 在 $w_0=f(z_0)\in\varDelta$ 的 w_0 均为可导，則 $F(z)=g\{f(z)\}$ 也在 z_0 可导，且

$$F'(z_0)=g'(w_0)f'(z_0).$$

这一定理关于实函数情况的証明在一般微积分书籍内都有，故从略。因为有了这个定理，对于微分的計算，一般是将 z 的函数看作 x 的函数来計算就够了。

2) **正則函数** 命 $w=f(z)$ 是定义在 Gauss 平面的开集 D 上的单值（有穷）函数，对于 D 的一点 z_0，有 z_0 的邻域 $V(z_0)\,(\subseteq D)$ 存在，在 $z\in V(z_0)$ 的所有点 z 处 $f(z)$ 可导，則叫做 $f(z)$ 在 $z=z_0$ **正則**。即 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 正則，只 $f'(z_0)$ 存在且有穷还不够，还必須在 z_0 的邻域的一切 z，$f'(z)$ 存在且有穷。

例如 $z=x+iy$，$f(z)=x^2$ 在 $x=0$, $y=0$ 虽然是可导的，但当 $x\neq 0$ 时則不可导，故 x^2 在 $(0, 0)$ 不是正則。

若 $f(z)$ 在某一开集 D 的所有点都正則，則叫做 $f(z)$ 在 D 上正則。故由第 40 頁内的討論，显然下列定理成立。

定理 3 $f(z)$ 为定义于 Gauss 平面的开集 D 上的单值函数，若在 D 上的各点有連續的偏微商 u_x, u_y, v_x, v_y，并且它們之間滿

足 Cauchy-Riemann 关系式

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x,$$

則 $f(z)$ 在 D 上正則。

給定单值函数 $f(z)$，定义它在复数球面的点 $z=\infty$ 正則时，可命

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right).$$

若 $g(z)$ 在 $z=0$ 正則，則叫做 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 正則，但事实上常遇到 $g(z)$ 在 $z=0$ 沒有値的情况，这时上述定义的意思是如果有穷极限値存在，以极限値为 $g(z)$ 在 $z=0$ 的値而是正則的，也就是可去孤立奇点的意思(参看 §11)。

如上述，正則函数的定义，不止要求在一点可导，而是要求在邻域的每点都可导。这样定义所带来的影响非常大，目前的复变函数論几乎全部都可以看作是这样定义所招致的。特别有意思的是由复变函数局部的値即可决定它的全体，也就因为这个，定义域不止是开集，考虑連通域更为妥当，更进一步就复变函数論特有的所謂 Riemann 面上的域考察最为切合。关于这些我們将在下章及第5章詳加討論，因此在本节主要地由局部观点考察正則函数的性质。

3) 正則函数的特性

(i) 域不变原理

定理 4　若 $f(z)$ 定义在 Gauss 平面一点 z_0 的邻域，且在該点正則，則 $w=f(z)$ 取 $f(z_0)$ 邻域的所有値。

証明　命 $z=x+iy$, $z_0=x_0+iy_0$, $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$，則由定理 1，u, v 在 z_0 的邻域 $V(z_0)$ 可全微分，故連續。另一方面，根据同一定理，u_x, u_y, v_x, v_y 存在且有穷，因为滿足 Cauchy-Riemann 方程，故

$$|f'(z_0)|^2 = |u_x + iv_x|^2 = (u_x)^2 + (v_x)^2 = (u_x)^2 + (u_y)^2$$

$$= \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)}. \tag{5.15}$$

由假設 $|f'(z_0)|^2 \neq 0$，得 $\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} > 0$。故 $(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$ 有适当的邻域，其中的值为 $f(z)$，$z \in V(z_0)$ 所取遍。

故 $w=f(z)$ 的純值域若不是域，則在所有的点 $f'(z)=0$，这时在所有的点 $u_x=v_x=u_y=v_y=0$，先按 x 积分，再按 y 积分，得出 $u(x, y)$，$v(x, y)$ 都是常数，即"常数以外的正則函数把域映射成域"。

这叫做**域不变原理**。因此，例如使 $\Re f(z)$ 或 $\Im f(z)$，或 $|f(z)|$ 等于常数的 $f(z)$ 也是常数，因为这时値域或在直綫或在圓周上而不能是域。

(ii) **单叶性** Gauss 平面的某一点集 A，如果含于过原点的某直綫所作的半平面內部时，則叫做 A 在半平面內。

定理 5 $f(z)$ 是定义于 Gauss 平面一点 z_0 的圆邻域的单值正則函数，若 $f'(z)$ 在該邻域 z 的所有值都在半平面內，則 $f(z)$ 在 $V(z_0)$ 单叶。

証明 若 $f'(z)$ 所属的半平面是幅角在 $\theta-\frac{\pi}{2}$ 到 $\theta+\frac{\pi}{2}$ 之間的点，則 $\Re e^{-i\theta} f'(z) > 0$。

今假定 z_1，z_2 是属于 $V(z_0)$ 的相异二点，且 $f(z_1)=f(z_2)$。命 $z_2 - z_1 = re^{i\varphi}$，$r>0$，再命 $z'=e^{-i\varphi}(z-z_1)$，$g(z)=e^{-i(\varphi+\theta)}f(z)$，則滿足 $g(z)=h(z')$ 的 h 是 z' 的正則函数(参看定理 2 复合函数的微分)。今命

$$h(z')=u(x', y')+iv(x', y'), \quad z'=x'+iy',$$

則

$$u_{x'} = \Re e^{-i\theta} f'(z) > 0.$$

因为$f(z_1)=f(z_2)$，故$h(0)=h(r)$，因此$0=h(r)-h(0)$，取它的实部，再由中值定理有$0=u(r, 0)-u(0, 0)=u_{x'}(t, 0)r$，$0<t<r$. 因为以$z_1$, z_2为端点的綫段全在$V(z_0)$内，$v_{x'}(t, 0)$与满足$0<t<r$的t无关地，恒$u_{x'}(t, 0)>0$, 这是不合理的。

(iii) **共形映射性** 命連續曲綫$z=z(t)$例如定义在$0\leqslant t\leqslant 1$上，$z(t)=x(t)+iy(t)$，則設$x(t)$，$y(t)$为定义在$0\leqslant t\leqslant 1$的单值实函数，且在$0\leqslant t\leqslant 1$連續，$x'(0)$；$y'(0)$存在，有穷且

$$\{x'(0)\}^2+\{y'(0)\}^2\neq 0,$$

这时候参数t的方程$z=z(t)$所表示的曲綫C在点$z(0)$有切綫(半直綫)，命切綫与正实軸的交角为θ，則

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta&=\frac{y'(0)}{\sqrt{\{x'(0)\}^2+\{y'(0)\}^2}},\\ \cos\theta&=\frac{x'(0)}{\sqrt{\{x'(0)\}^2+\{y'(0)\}^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

今命D为Gauss平面的域，z_0为其任一点，$w=f(z)$为定义在D上的单值連續函数。D内$z(0)=z_0$的曲綫，經$f(z)$映射成曲綫$w=f(z(t))$，用Γ表示，这时对于具上述条件的任意曲綫C，命$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$，

$$f(z(t))=u(x(t), y(t))+iv(x(t), y(t)),$$

$$U(t)=u(x(t), y(t)),\ V(t)=v(x(t), y(t)), \tag{5.17}$$

則$U'(0)$，$V'(0)$存在，有穷且$\{U'(0)\}^2+\{V'(0)\}^2\neq 0$. 因此可以假定$\Gamma$在点$w_0=U(0)+iV(0)$有切綫。其次，假定这一切綫和正$U$軸的交角为$\Theta$，$\Theta-\theta$只与$w=f(z)$有关而与最初的曲綫$C$无关，則称$w=f(z)$在$z=z_0$为**共形的**。

这时候，在D任意画两条象上述那样的曲綫C, C'，在z_0处可以作C, C'的切綫，切綫所构成的角叫做C, C'在z_0的**交角**。所謂$w=f(z)$在$z=z_0$处为共形，和C, C'的交角(方向也包括在

内)与它的象曲綫 Γ, Γ' 在 w_0 的交角相等是一致的。

映射 $w=f(z)$ 在 $z\in D$ 的各点都是共形时，叫做 $f(z)$ 共形映射 D，或定义于 D 的共形映射。

有了以上的准备后，进一步来求映射是共形的条件。

定理 6 定义在 Gauss 平面域 D 上的单值連續函数 $w=f(z)$，若在 D 内的一点 z_0 可导且 $f'(z_0)\neq 0$，則 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 为共形的。

証明 一般地复数 $K(t)$ 定义于 $0<t<\delta$ (δ 为任意固定的正数)，若 $\lim\limits_{t\to 0} K(t)=H$，且 $H\neq 0$，則

$$\lim_{t\to 0} \arg K(t)=\arg H.$$

今应用这一原理于下列关系式。即命 $z=z(t)$，既然 $f'(z_0)$ 存在且有穷，特别若沿曲綫 C，$dz=z-z_0$ 收斂于 0，

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0).$$

故由上述的注意有

$$\lim_{t\to 0} \arg \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\arg f'(z_0),$$

这里左端

$$=\lim_{t\to 0} [\arg\{f(z)-f(z_0)\}-\arg(z-z_0)]$$

$$=\lim_{t\to 0} \arg\{f(z)-f(z_0)\}-\lim_{t\to 0} \arg(z-z_0)$$

(因为由假設各极限都存在)

$$=\Theta-\theta \text{ (因为由定义 } \Theta=\lim_{t\to 0} \arg\{f(z)-f(z_0)\}$$

$$\theta=\lim_{t\to 0} \arg(z-z_0)).$$

故最后得出 $\Theta-\theta=\arg f'(z_0)$. 这一等式的右端与最初的曲綫 C 无关。

定理 7 若定义在 Gauss 平面域 D 的单值連續函数 $w=f(z)$ 在 D 内的一点 z_0，$u(x, y)$，$v(x, y)$ 可全微分，且为共形的，則

$f(z)$在$z=z_0$可导且$f'(z_0)\neq 0$。(其中$u(x,y)$，$v(x,y)$的意义同上，即$z=x+iy$，$f(z)=u+iv$。)

証明　設$\Theta-\theta=\alpha$，α与C，因之，与θ无关。由(5.16)知道，

$$\tan\Theta=\frac{V'(0)}{U'(0)}=\frac{v_x x'_t(0)+v_y y'_t(0)}{u_x x'_t(0)+u_y y'_t(0)}$$

$$=\frac{v_x+v_y\tan\theta}{u_x+u_y\tan\theta},\tag{5.18}$$

其中$u_x=u_x(x_0,y_0)$，$v_x=v_x(x_0,y_0)$等，以及

$$\tan\theta=\frac{y'_t(0)}{x'_t(0)}.$$

另一方面，由于$\Theta=\theta+\alpha$，故

$$\tan\Theta=\tan(\theta+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\theta}.\tag{5.19}$$

故由(5.18)及(5.19)得

$$\frac{v_x+v_y\tan\theta}{u_x+u_y\tan\theta}=\frac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\theta},\tag{5.20}$$

去分母再对于$\tan\theta$整理，得

$$v_x-u_x\tan\alpha+(v_y-u_x-v_x\tan\alpha-u_y\tan\alpha)\tan\theta$$
$$+(v_y\tan\alpha+u_y)\tan^2\theta=0.$$

这对于$\tan\theta$来說是恒等式，故得

$$v_x=u_x\tan\alpha,\quad v_y-u_x=(v_x+u_y)\tan\alpha,\quad u_y=-v_y\tan\alpha.$$

把第一式及第三式代入第二式的右端，得

$$(v_y-u_x)(1+\tan^2\alpha)=0.$$

由此首先得出$v_y=u_x$，再代入第一式及第三式的右端，并注意到$v_y=u_x$，由此得出$v_x=-u_y$，即

$$u_x=v_y,\qquad v_x=-u_y,\tag{5.21}$$

即在(x_0,y_0) Cauchy-Riemann方程成立。故由定理1，系，得出$f(z)$在$z=z_0$处可导。其次由(5.19)显然可以看出$\tan\Theta$不能是与$\tan\theta$无关的量，利用这一結果到(5.18)，知道最右端的一次式

的行列式不为零(参看§3)。因此

$$\begin{vmatrix} v_x & v_y \\ u_x & u_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

这与(5.21)結合起来,是为

$$|f'(z_0)|^2 = |u_x + iv_x|^2 = u_x^2 + v_x^2 = u_x v_y - v_x u_y \neq 0.$$

由此定理显然可以看出下面的系成立。

系 对于定义在 Gauss 平面的域 D 的单値函数 $w=f(z)$,当 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, $z=x+iy$ 时,$u(x, y)$, $v(x, y)$ 在 D 的各点有連續偏微商,且在 D 是共形的,则 $f(z)$ 在 D 上为正则。另外应用 Goursat 定理(参看§9的2))显然看出这一条件也是必要的。

4) **无穷小圆** 和前节一样,定义在 Gauss 平面域 D 的单値函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, $z=x+iy$, 在 D 的一点 $z=z_0=x_0+iy_0$ 設 u, v 可全微分,于是,由定义,

$$\left.\begin{aligned} u(x, y)-u(x_0, y_0) &= u_x(x-x_0)+u_y(y-y_0) \\ &\quad +\sigma(x, y, x_0, y_0), \\ v(x, y)-v(x_0, y_0) &= v_x(x-x_0)+v_y(y-y_0) \\ &\quad +\tau(x, y, x_0, y_0), \end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{\sigma(x, y, x_0, y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} &= 0, \\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{\tau(x, y, x_0, y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

故就(x_0, y_0)的充分小的邻域考察时,由于(5.22),去掉σ, τ的項与未去掉前的結果大体相同。这种事实我們用語言"在无穷小处",或"在微小处"表达。

这时在 z 平面上以 z_0 为心作圆,这一圆可由变数 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$

$$x-x_0=r\cos\theta,\quad y-y_0=r\sin\theta\quad (C)\tag{5.24}$$

表示出来，其中 r 为圆的半徑，可考虑为充分小。把 (5.24) 代入 (5.22)，并且弃掉 σ 及 τ 的項，得

$$u(x,y)-u(x_0,y_0)=r\{u_x\cos\theta+u_y\sin\theta\},$$
$$v(x,y)-v(x_0,y_0)=r\{v_x\cos\theta+v_y\sin\theta\}.$$

为了使这里的圓 C 在 $w=u+iv$ 平面上的象是圓，必要的条件是 $\{u(x,y)-u(x_0,y_0)\}^2+\{v(x,y)-v(x_0,y_0)\}^2$ 与 θ 无关。实际地写出这一式，有

$$r^2\{(u_x^2+v_x^2)\cos^2\theta+(u_y^2+v_y^2)\sin^2\theta+2(u_xu_y+v_xv_y)\cos\theta\sin\theta\}.\tag{5.25}$$

命 $\theta=0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}$ 时上式的值相等，得

$$u_x^2+v_x^2=u_y^2+v_y^2$$
$$=\frac{1}{2}(u_x^2+v_x^2+u_y^2+v_y^2+2u_xu_y+2v_xv_y),\tag{5.26}$$

最左端与当中一項的平均值也等于这些，由最右端內減去这平均值，得 $u_xu_y+v_xv_y=0$，即

$$u_xu_y=-v_xv_y.\tag{5.27}$$

更由 (5.26) 的最左端及当中一項，有

$$u_x^2-u_y^2=v_y^2-v_x^2,\tag{5.28}$$

把上式平方再加 (5.27) 平方的 4 倍，得

$$u_x^2+u_y^2=v_y^2+v_x^2,$$

把此式与 (5.28) 相加得

$$u_x^2=v_y^2.\tag{5.29}$$

今分两种情形討論。

第一情形：$u_x=v_y$ 时；只要两者都不是零，由 (5.27) 有

$$u_y=-v_x.$$

第二情形：$u_x=-v_y$ 时；只要两者都不是零，由 (5.27) 有

$$u_y = v_x.$$

由(5.28)及(5.29)得 $u_y^2 = v_x^2$，故上面的討論对于 x，y 对換时也成立。由(5.25)，(5.26)，(5.27)显然得出(5.25)的值为

$$r^2(u_x^2+v_x^2) = r^2(u_y^2+v_y^2),$$

这可以考虑为 (u, v) 平面上的圓的半徑的平方，所以不是零。因此 u_x 及 v_x 或 u_y 及 v_y 不能同时为零。这样可以考慮的組合只有下列二种：

$$\left.\begin{array}{lll} \text{第一情形：} & u_x = v_y, & u_y = -v_x, \\ \text{第二情形：} & u_x = -v_y, & u_y = v_x. \end{array}\right\} \quad (5.30)$$

第一种情形根据定理1，系，得出 $f'(z)$ 存在且有窮，第二种情形以 $-v$ 代替 v 即成第一种情形，这表明自 z 至 $\overline{f(z)}$ 的映射。

反之，給定了在 z_0 可导的 $f(z)$，对于映射 $f(z)$ 或 $\overline{f(z)}$ (5.30)成立，把它代入(5.25)，則(5.25)的值为

$$r^2(u_x^2+v_x^2),$$

故

$$|w(z)-w(z_0)| = r\sqrt{u_x^2+v_x^2} = r\cdot|f'(z_0)|.$$

另一方面，如已証明的，当 $w(z)-w(z_0)$ 的幅角为 Θ 时，若 $f'(z_0)\neq 0$，則 $\Theta=\theta+\alpha$ ($f(z)$ 的情形)或 $\Theta=-\theta+\alpha$ ($\overline{f(z)}$ 的情形)，所以 z 在圓周 $|z-z_0|=r$ 上右旋一周时，w 在圓周

$$|w(z)-w(z_0)| = r|f'(z_0)|$$

上右旋一周或左旋一周。綜合以上所述得下列定理。

定理 8 定义在 Gauss 平面域 D 的单值函数

$$w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y), \quad z=x+iy,$$

在 D 内各点都有連續偏微商 u_x，u_y，v_x，v_y，它把无穷小圓映射成无穷小圓的充要条件为 $f(z)$ 在 D 的任何点都正則，且 $f'(z)\neq 0$，或者是这样的 $f(z)$ 的共轭函数。这时 z 及 w 两平面上无穷小圓半徑的比等于 $|f'(z)|$。

由这一定理的正則函数 $f(z)$ 所作共軛函数的映射，虽不变相交曲綫的交角，但角的方向却是相反的。因此，这样的映射叫做**逆向共形** (indirectly conformal)，而普通的共形則叫做**順向共形** (directly conformal)。

另外，在共形映射的定义中，未曾要求假定映射函数 $w=f(z)$ 为单值，通常是在**一对一双方連續**的假定下，再加共形的条件，才叫做共形映射，因此在本章以外的地方将依照后者。

5) **与調和函数的关系** 定义在 (x, y) 平面开集 D 上的实函数 $u(x, y)$，若在 D 内各点都有一直到二阶的偏微商 u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} 存在、連續且滿足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}=0, \tag{5.31}$$

則叫作 $u(x, y)$ 在 D 上为**調和函数**。

根据后面将要叙述的 Goursat 定理，定义在 Gauss 平面域 D 内的单值正則函数 $f(z)$，它的各阶导数 $f'(z)$, $f''(z)$ 等都在 D 内为单值正則。把这样的 $f(z)$ 分成实部与虚部，命

$$f(z)=u(x, y)+iv(x, y); \quad z=x+iy,$$

則 u, v 都有一直到二阶的偏微商，且为連續。另一方面，u, v 滿足 Cauchy-Riemann 关系式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5.32}$$

因此把它分别再关于 x, y 求微商

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}.$$

因为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}$ 等为連續，故有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}.$$

所以由前四式有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

这样在 Goursat 定理成立的假定下，得出下列定理。

定理 9 在 Gauss 平面域 D 的单值正則函数 $f(z)$ 的实部与虛部同时在 D 内为調和函数。

假設域 D 为单連通域，在 D 上給定調和函数 $u(x, y)$ 时，满足 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 的单值正則函数 $f(z)$ 是否存在？如果存在的話，它是否是唯一的？ 这是下面将要考虑的問題。

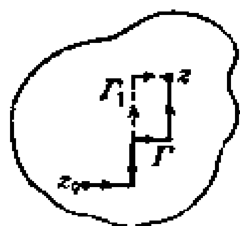


图 5.1

今先由給定的調和函数 $u(x, y)$，求出满足 Cauchy-Riemann 方程(5.32)的另一个調和函数 $v=v(x, y)$。这样的 u，v 叫做**彼此共軛的調和函数**。把 D 内的一点 z_0 固定，然后任取一个 $z\in D$ 的点 z，可用平行于坐标軸的折綫 Γ（参看图 5.1）連結 z_0 及 z。考察沿曲綫 Γ 的**綫积分**

$$V(x, y)=(\Gamma)\int_{z_0}^{z}\frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi}\,d\eta-(\Gamma)\int_{z_0}^{z}\frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta}\,d\xi, \tag{5.33}$$

首先，这一积分系定义为沿平行于坐标軸的折綫的积分，在平行于 x 軸的綫段上，$d\xi=\pm dx$（向右进行时为 $+$，向左进行时为 $-$），$d\eta=0$；在平行于 y 軸的綫段上，$d\xi=0$，$d\eta=\pm dy$（向上进行时为 $+$，向下进行时为 $-$）。因为 u 为調和函数，被积函数 $\frac{\partial u}{\partial \xi}$，$\frac{\partial u}{\partial \eta}$ 为連續，故积分常存在。由于 D 为单連通域，故假定向右繞矩形一周时，(5.33)右边的两个积分同时为零，則 $V(x, y)$ 的值只与 z_0

及 $z=x+iy$ 有关，而与积分路綫 Γ 无关。令命这一矩形的周界为 C，內部为 D_1，引用著名的 Green-Gauss 定理，証明如下：

假定 $P(\xi, \eta)$ 及 $Q(\xi, \eta)$ 在 C 上及其內部 D_1 上均为連續，則

$$\int_C \{P\, d\xi + Q\, d\eta\} = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta. \tag{5.34}$$

这就是 Green-Gauss 定理。現在命 $P(\xi, \eta) = -\dfrac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta}$，$Q(\xi, \eta) = \dfrac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi}$，則有

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta^2}.$$

由假設 $u(\xi, \eta)$ 在 D 內各点为調和函数，故恒为零，所以(5.34)的右端为零，把左端写出后有

$$\int_C -\frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} d\xi + \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta = 0.$$

对于所有的矩形 C 这一关系都成立，故結果(5.33)只与 z_0 及 z 有关，而且单一地确定。由 $V(x, y)$ 作微商 $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ 时应用图上的 Γ，作 $\dfrac{\partial V}{\partial y}$ 时应用图上的 Γ_1，由此显然有

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}. \tag{5.35}$$

由于方程的右端还能够求偏微商，故有

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y\, \partial x}.$$

更因右端連續，故 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$，从而

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

$V(x, y)$ 是調和函数的条件中，只剩下要証明 $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}$，$\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial x}$ 是連續了。由(5.35)，

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}.$$

因此 $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$ 都連續。即 $V(x, y)$ 为調和函数。

其次，(5.35) 为 u 及 V 之間的 Cauchy-Riemann 关系，故 V 为 u 的共軛調和函数。故由定理 1，系，知

$$F(z) = u(x, y) + iV(x, y)$$

是在 D 內的单值正則函数，因此我們求出了一个解。其次命一般解为

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

則

$$f(z) - F(z) = i\{v(x, y) - V(x, y)\} \tag{5.36}$$

在 D 內为单值正則，且 $\Re\{f(z) - F(z)\} = 0$，因此必須是常数（参看 §5 的 3) (i)）；即

$$f(z) - F(z) = \text{常数}.$$

但这一常数与 (5.36) 的右端比較，如果不是零的話，必須是純虛数。綜合以上所述，得

定理 10 Gauss 平面单連通域 D 上給定了单值調和函数 $u(x, y)$ 时，則能够求出它的共軛調和函数 $v(x, y)$，在 D 上 $u(x, y) + iv(x, y)$ 为单值正則函数。这样的正則函数，除去相差一个純虛数的常数外，唯一确定。

例如考察函数 $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$，应用上述的 (5.33)，即可决定 $f(z) = z^3 + ic$ (c 为实数)。

6) **冪級数的正則性** 实际函数中，常遇到給定的是冪級数，不只是这样，它还是第 5 章解析开拓理論的出发点。因此在这里首先討論一下冪級数所表示的函数的正則性。

定理 11 冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 的收斂半徑 R 是正数

时，則 $f(z)$ 在收斂圓的內部：$|z-a|<R$ 单值正則，且其导数为

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1} \quad (|z-a|<R), \qquad (5.37)$$

卽冪級数在其收斂圓內可以**逐項微分**。

証明 首先証明冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ 的收斂半徑也是 R。为此取 $|z-a|<R$ 中的任意 z，則有满足 $|z-a|=r<\rho<R$ 的正数 ρ 存在，因为

$$|n(z-a)^{n-1}|=nr^{n-1}=\frac{\rho^n}{r}n\left(\frac{r}{\rho}\right)^n=\frac{\rho^n}{r}\frac{n}{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n}$$

$$=\frac{\rho^n}{r}\frac{n}{\left(1+\frac{\rho-r}{r}\right)^n}<\frac{\rho^n}{r}\frac{n}{1+n\frac{\rho-r}{r}}$$

$$=\frac{\rho^n n}{r+n(\rho-r)}<\frac{\rho^n}{\rho-r},$$

故可考慮 $\frac{1}{\rho-r}\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|\rho^n$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ 的优級数。因 $\sum c_n(z-a)^n$ 的收斂半徑为 R，故当 $0<\rho<R$ 时显然这一优級数也收斂。故 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收斂半徑 R 及 $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ 的收斂半徑 R_1 之間具有关系 $R_1\geqslant R$。另一方面，由于

$$|c_n||z-a|^n\leqslant n|c_n||z-a|^{n-1}|z-a| \quad (n=1, 2, \cdots),$$

故显然有 $R_1\leqslant R$，卽 $R=R_1$。継續用同样的方法进行多次，例如当 $|z-a|<R$ 时

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(z-a)^{n-2}$$

仍为絕对收斂。

其次，将証明(5.37)成立。旣然已經知道(5.37)的右端收斂，由导数的定义，取 h 充分小，例如 $0<|h|<\rho-r$，令求

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{h} \{(z-a+h)^n - (z-a)^n - nh(z-a)^{n-1}\}$$

的优級数。为此，命 α, β 为满足 $|\alpha| \leqslant \rho$, $|\beta| \leqslant \rho$ 的任意二个复数，注意到

$$|\alpha^i - \beta^i| = |\alpha - \beta| \, |\alpha^{i-1} + \alpha^{i-2}\beta + \cdots + \beta^{i-1}|$$
$$\leqslant |\alpha - \beta| \, i\rho^{i-1}$$

对于 $i=1,2,3,\cdots$ 时都成立。命 $\alpha = z-a+h$, $\beta = z-a$, $\alpha-\beta = h$, 则上式的 { } 中为

$$\{\alpha^n - \beta^n - nh\beta^{n-1}\} = h\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha^{n-i}\beta^{i-1} - n\beta^{n-1}\right\}$$
$$= h\sum_{i=1}^{n} (\alpha^{n-i}\beta^{i-1} - \beta^{n-1})$$
$$= h\sum_{i=1}^{n} \beta^{i-1}(\alpha^{n-i} - \beta^{n-i}).$$

由上面的注意，有

$$|\alpha^n - \beta^n - nh\beta^{n-1}| \leqslant |h|^2 \sum_{i=1}^{n} \rho^{i-1}(n-i)\rho^{n-i-1}$$
$$= |h|^2 \rho^{n-2} \sum_{i=1}^{n} (n-i)$$
$$= |h|^2 \rho^{n-2} \frac{n(n-1)}{2}.$$

故优級数可取为

$$\frac{|h|}{2} \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| n(n-1)\rho^{n-2}.$$

Σ 号下部分由上面所述知道它收斂，这与 h 无关，从而与 Σ 号前的 $|h|$ 一起全体收斂于 $\mathbf{0}$。

由定理 11 知道，冪級数的系数可由 $f(z)$ 在 $z=a$ 的各級导数决定，即

系 若 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 的收斂半徑 R 为正数，则

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{5.38}$$

証明 事实上，把定理 11 連續应用 k 次，则

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}c_n n(n-1)\cdots(n-k+1)(z-a)^{n-k}$$

在 $|z-a|<R$ 成立。在上式中命 $z=a$，则只剩下 $n=k$ 的項，立刻得出(5.38)。

§6 初等函数

1) $w=z^2$ 命 $z=x+iy$，$w=u+iv$，由于

$$w=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy,$$

故

$$u=x^2-y^2,\quad v=2xy, \tag{6.1}$$

消去 y，得

$$v^2=4x^2y^2=4x^2(x^2-u). \tag{6.2}$$

令 x 为固定值 $x=x_0$，这表明平面上的直綫 $x=x_0$ 的象在曲綫 $v^2=4x_0^2(x_0^2-u)$ 上。由于包含 x_0 的平方，故两直綫 $x=\pm x_0$ 的象重合。特別重要的情形是 $x_0=0$，这时虽然有 $v=0$，但象并不是 $v=0$ 的全体，由(6.1)可看出 $u=-y^2$，故象只是 $u\leqslant 0$ 的实軸部分。

由于 $\frac{dw}{dz}=2z$，故除 $z=0$ 以外，在 Gauss 平面上所有的点都为共形映射。故由(6.1)中消去 x，在 w 平面上，得出与(6.2)正交的曲綫族

$$v^2=4x^2y^2=4y^2(y^2+u). \tag{6.3}$$

反之，在平面上給定 $u=u_0$ 时，这是平行于 v 軸的直綫，这时由(6.1)有 $u_0=x^2-y^2$；同样給定 $v=v_0$ 时，有 $v_0=2xy$，这是彼此正交的双曲綫。

(x, y)平面与(u, v)平面的对应，因为$\pm z$对应同一个z^2，所以是二对一的对应，为了找出一一对应，通常在z平面上取$y>0$及$y=0$时$x\geqslant 0$的部分与(u, v)全部对应。这一对应虽然有人用

$$w=z^2,\quad z=\sqrt{w}$$

表示，但符号$\sqrt{w}$考虑作表示二值函数时比較方便，我們也采用后者。

2) $w=z^n$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$ 討論这一映射时采用极坐标較为方便。命$z=re^{i\theta}$，$w=Re^{i\Theta}$，因为$Re^{i\Theta}=z^n=r^ne^{in\theta}$，故有

$$R=r^n,\ \Theta=n\theta+2m\pi\quad (m=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots). \tag{6.4}$$

当z在圆周$|z|=r(0<r<\infty)$上右旋轉一周时，w在以$w=0$为中心、r^n为半徑的圆$|w|=r^n$周上轉n周。

計算$\dfrac{dw}{dz}$立刻得出nz^{n-1}。故在Gauss平面上任何点都正則。除$z=0$外，在其他各点都是共形的。由(6.4)可以比較簡单地看出映射的情况。对应一般地是n对1，为了要得出一一对应，把繞$z=0$的周角分为n等分使$0\leqslant\theta<\dfrac{2\pi}{n}$即可。在$z=0$的邻域，不只是在$z=0$不是等角的，并且对应状态也复杂，这将于第5章内詳細研究。

这一函数的反函数用$z=\sqrt[n]{w}$表示。

3) **有理整多項式** $a_0, a_1, \cdots, a_n$为复数常数时，

$$w=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n \tag{6.5}$$

叫做**有理整多項式**。因为$\dfrac{dw}{dz}=a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}$，故它在Gauss平面的任何点都正則。后面将要説明一般地对应为n对1(参看§11的5))。

4) **有理函数** 两个有理整多項式

$$\begin{cases} P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n, \\ Q(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m \quad (b_m\neq 0) \end{cases}$$

的比

$$w=R(z)=\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m}$$

叫做**有理函数**。分母及分子有无公因子，可用 Euclid 算法求$P(z)$及 $Q(z)$ 的最高公因子，所以通常都将公因子消掉。$\frac{dR(z)}{dz}$ 可由定理 2 求得为

$$\frac{dR}{dz}=\frac{P'(z)Q(z)-P(z)Q'(z)}{\{Q(z)\}^2}.$$

故在 Gauss 平面上除去 $Q(z)=0$ 的根外，在其他各点都正则。在 $z=\infty$ 有时也可以正则。例如

$$w=\frac{z^2-1}{z^3+1} \tag{6.6}$$

在 $z=\infty$ 处为正则点，在有穷平面除去 $z=\pm i$ 外，在其他各点均为正則，在 $z=0$ 不是共形的。

又如函数

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \tag{6.7}$$

在 Gauss 平面的 $z=0$ 不正則，在 $z=\pm 1$ 不是共形的。

命 $|z|=1$ 或 $z=e^{i\theta}$，則

$$w=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=\cos\theta,$$

即 w 在实軸上，z 及 $\frac{1}{z}$ 对应于同一个点 w，故为二对一对应。

映射的情况：当 $z=\rho e^{i\theta}$，$1\leqslant\rho<+\infty$ 时，由于

$$w=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\theta+i\,\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\theta,$$

命

$$u=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\theta,\quad v=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\theta,\tag{6.8}$$

由(6.8)中消去 θ，卽将(6.8)代入 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 中，卽得

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)^2}=1,\tag{6.9}$$

这是共焦点的椭圆族。

另外，若要消去 ρ，則由(6.8)消去 $\rho+\frac{1}{\rho}$ 与 $\rho-\frac{1}{\rho}$ 就够了，由(6.8)得

$$\frac{u^2}{\cos^2\theta}-\frac{v^2}{\sin^2\theta}=1,\tag{6.10}$$

这是与(6.9)正交的双曲綫族。

5) **代数函数** 若 $P_0(z)$, $P_1(z)$, …, $P_n(z)$是有理整多項式，則滿足

$$P_n(z)w^n+P_{n-1}(z)w^{n-1}+\cdots+P_1(z)w+P_0(z)=0$$

的 w 的値对于每个 z 的值有 n 个存在，把它看作 z 的函数时为 n 値函数，但設 $P_n(z)$ 不恒等于零。$n=1$ 时恰与有理函数一致。

不是代数函数的函数都叫做**超越函数**。

6) **指数函数** 欲求在实軸上与 e^x 一致的正則函数，可将 e^x 展为幂級数

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots,$$

然后用 z 代替 x

$$f(z)=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots,\quad f(x)=e^x.$$

它在 Gauss 平面所有点都絕对收斂，故收斂半徑是 ∞，所以在 Gauss 平面的任何点都为正則。

特別在虛軸上，令 $z=iy$，則

$$z^{4n+\nu}=(i)^{\nu}y^{4n+\nu}\ (\nu=0,1,2,3),\ i^{\nu}=1,i,-1,-i,$$

故

$$f(iy)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}y^{2n}+i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}y^{2n-1}$$
$$=\cos y+i\sin y.$$

另一方面，由級数乘法公式，有

$$f(z_1)f(z_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z_2^m}{m!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_1^n}{n!}+\frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!}\frac{z_2}{1!}+\frac{z_1^{n-2}}{(n-2)!}\frac{z_2^2}{2!}+\cdots+\frac{z_2^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n.$$

故 $f(z_1)f(z_2)=f(z_1+z_2)$。特别命 $z_1=x$, $z_2=iy$, $z=x+iy$, 則

$$f(x+iy)=f(x)f(iy)=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z.$$

由此得

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots,\tag{6.11}$$

且在 Gauss 平面任何点都为正則。由(6.11)逐項微分，得

$$\frac{de^z}{dz}=e^z.$$

另一方面，由于 $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ 以及 $e^x\neq 0$, $|\cos y+i\sin y|=1$, 故知 $e^z=0$ 的根不存在。因此 e^z 在 Gauss 平面的所有点都是共形的。

因为

$$e^{2n\pi i}=\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi=1,$$

故

$$e^{z+2n\pi i}=e^z e^{2n\pi i}=e^z,$$

即 e^z 为**周期函数**，它的周期为 $2\pi i$。反之 e^z 沒有其他周期的事实可从 $e^{z+\alpha}=e^z$ 求 α 看出来。即由此等式有 $e^z e^\alpha=e^z$ 或 $e^z(e^\alpha-1)=0$,

这里因为 $e^z\neq0$，故得 $e^\alpha=1$. 命 $\alpha=\beta+i\gamma$，因为

$$e^\alpha=e^\beta(\cos\gamma+i\sin\gamma),$$

故有

$$e^\beta\cos\gamma=1,\quad e^\beta\sin\gamma=0.$$

由第二式，因为 $e^\beta\neq0$，故 $\sin\gamma=0$. 这样的 γ 必须是 $\gamma=m\pi$ ($m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$) 中的任一个。因此再由第一式有 $(-1)^m e^\beta=1$，故 m 必为偶数，且 $\beta=0$. 故周期全部具有 $2n\pi i$ 的形状。这样 e^z 具有周期 $2n\pi i$ ($n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$)，并且沒有其他周期。

e^z 的周期 $2\pi i$ 用整数乘后可得出其他全部周期，这一周期叫做**主周期** (principal period). 欲了解 $w=e^z$ 的映射情况，可就 $-\pi\leqslant y<\pi$，$-\infty<x<+\infty$ 部分考察，因为作平行于虚軸的平移 $y'=y+2n\pi$，$x'=x$，即得出同样的情况。故 z 平面的这一部分与 w 平面的全部为一一对应。

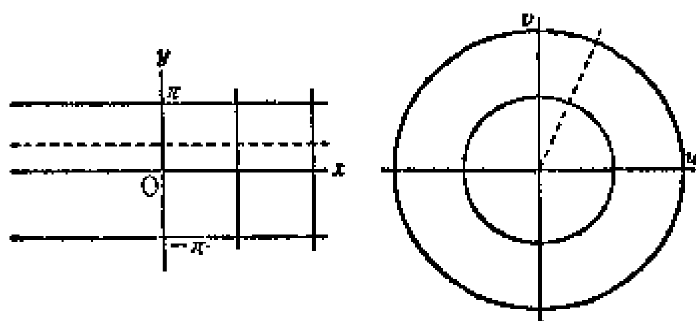


图 6.1

7) **三角函数** 欲求在实軸上和 $\cos x$ 或 $\sin x$ 一致的正則函数，可采取与 e^z 同样的方法。但这里用下列方法也行。因 e^z 在 Gauss 平面的任何点正則，且已知

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y),\quad z=x+iy,$$

用 $iz=-y+ix$ 代替 z，則

$$e^{iz}=e^{-y}(\cos x+i\sin x).$$

这一式在实軸上与 $\cos x+i\sin x$ 一致，再用 $-z$ 代 z，然后取它們

的平均値，即用

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}) \tag{6.12}$$

定义 $\cos z$ 即可。同样可定义 $\sin z$ 为

$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}). \tag{6.13}$$

同时由等式的右端可看出，在 Gauss 平面的任何点都是正則的。因此由(6.11)直接得出以下的幂級数展开式：

$$\left.\begin{aligned}\cos z&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},\\ \sin z&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-1},\end{aligned}\right\} \tag{6.14}$$

它們的收斂半徑都是 ∞。这样的幂級数在实軸上分别与 $\cos x$ 及 $\sin x$ 一致，除此之外，沒有其他的幂級数在实軸上与 $\cos x$ 或 $\sin x$ 一致，这可由定理 11 的系(§5)看出来。对于正則函数說，也是一样，这是下一章的主要問題(参看 §10 的 1))。

由定义(6.12)，(6.13)容易看出 $\cos z$ 为偶函数(即 $\cos(-z)=\cos z$)，$\sin z$ 为奇函数(即 $\sin z=-\sin(-z)$)；由(6.14)的展开式也可以看出偶函数的情形只由偶次幂的項构成，奇函数則只由奇次幂的項构成。

三角函数中的代数关系可由(6.12)及(6.13)中消去 e^z 即可得出。即解出 e^{iz}，e^{-iz}，

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,\quad e^{-iz}=\cos z-i\sin z. \tag{6.15}$$

由此得出欲求的关系式为 $1=\cos^2 z+\sin^2 z$。其次由定义(6.12)，(6.13)，或由展开式(6.14)容易求出 $\cos z$，$\sin z$ 的导数，

$$\frac{d}{dz}\cos z=-\sin z,\qquad \frac{d}{dz}\sin z=\cos z. \tag{6.16}$$

因 e^z 的周期为 $2n\pi i$，故由(6.12)及(6.13)知道 $\cos z$，$\sin z$ 的周期

为 $2n\pi$ ($n=0, \pm1, \pm2, \cdots$)。根据 (6.16) 可知 $\cos z$ 的任意周期同时也是 $\sin z$ 的周期，$\sin z$ 的周期同时也是 $\cos z$ 的周期。这可証明如下：若 $z'=z+\alpha$ 而 $f(z')=f(z)$，则对于 $g(z)=\dfrac{df(z)}{dz}$，有

$$g(z')=\frac{df(z')}{dz'}=\frac{df(z)}{dz'}=\frac{f(z)}{dz}\cdot\frac{dz}{dz'}=g(z)\cdot 1=g(z).$$

故 $\cos z$, $\sin z$ 具有周期 α 时，则由 (6.15) α 也是 e^{iz} 的周期，因此 $i\alpha$ 为 e^z 的周期。由于 e^z 的周期除 $2n\pi i$ 之外沒有其他周期，故 $\cos z$, $\sin z$ 只有周期 $2n\pi$。

8) **对数函数** 指数函数的反函数叫做**对数函数**。

这一函数用 $w=\log z$ 表示。但因为 e^z 有周期 $2n\pi i$ ($n=0, \pm1, \pm2, \cdots$)，故 $\log z$ 不能是单值函数，即对于 $z=z_0$，$\log z_0$ 所取的某一个值假定为 w_0，则 $w_0+2n\pi i$ 也是它的值。但是除此以外 $\log z_0$ 不取其他的值，故在 w 平面命 $w=u+iv$，而限制 $-\pi\leqslant v<\pi$，则应得出单值的 $\log z$。

事实上，由于 $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$，故 $|w|=e^x$，$\arg w=y$，故 $x=\log|w|$，$y=\operatorname{arc} w$，即

$z=re^{i\theta}$ 时，命

$$\log z=\log r+i(\theta+2n\pi)\quad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots), \tag{6.17}$$

对于 $i(\theta+2n\pi)$ 的部分，想要满足上述規定，定 n 满足 $-\pi\leqslant\theta+2n\pi<\pi$ 即可。

因 $\log z$ 为多值函数，取它的值时往往会发生误取。为了避免差错，創立了优秀的方法，这或可叫做**連續原理**，即令变数 z 不是在 Gauss 平面上变动，而代之以在所謂 Riemann 面上变动，这是用无穷个重迭面作成的。

首先叙述这个面的作法，考察同样的无穷多个 Gauss 平面

$$\cdots\cdots,\ G_{-2},\ G_{-1},\ G_0,\ G_1,\ G_2,\cdots\cdots,$$

由各 Gauss 平面的 $z=0$ 起到 $-\infty$ 沿实軸划开，使 G_n 的上緣与 G_{n+1} 的下緣粘合。对于所有的 $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$ 实行这一粘合，由此得出一个連結面。由这一面上的某点，例如由 G_0 上的 z 点出发，使它不通过 $z=0$ 而沿繞 $z=0$ 的曲綫轉一周后，z 已不在 G_0 而应在 G_1 上。当 z 这样的变化时，$\log z$ 也变化；它的虚部逐漸增大，z 繞一周增大 $2\pi i$。它的实部不論 z 怎样改变，只要轉回来还是 $\log|z|$。因此想要决定 $\log z$ 的值，可設 z 在上述的面上，沿該面上連續曲綫以求值即可。如这样还办不到的話，只好将定义(6.17)所决定的无穷多个值都考虑作候补才行。

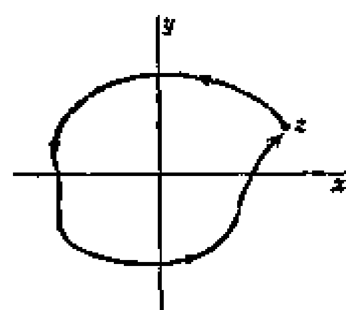


图 6.2

由以上的考察，在上述的面上考虑时，$\log z$ 可当作单值函数处理，这个面一般地叫做 Riemann 面。关于这在第5章内还要詳細討論。

上述面的每个 G_n 叫作这一 Riemann 面的**叶**(leaf)。今在 Gauss 平面上任取一点 $z_0\neq0$，选正数 ρ 充分小，使 $0<\rho<|z_0|$，以 z_0 为中心、ρ 为半徑作圓，沿这个圓周将上述 Riemann 面剪开，則各 G_n 都被割下一块圓板，总計割下无穷多块圓板。$\log z$ 的值，例如在 G_0 上的 z_0 被指定时，則其他叶上的值也全部决定。如果限制 z 在这一圓板內而不得外出时，就不能移到其他的值，并且在这无穷多个圓板的每一个，$\log z$ 的映射都是一对一的。这样的每个映射都叫做 $\log z$ 在圓：$|z-z_0|<\rho$ 內的**分支**(branch)。在某一分支如果是

$$\log z=\log r+i\theta,$$

則在其他的分支为

$$\log z=\log r+i\theta+2n\pi i.$$

因此在 z 点求导数时 $2n\pi i$ 即行消去，結果得出单值函数。命 $\log z$ 在某任意点 $z=z_0\ (z_0\neq0)$，$z_0=r_0e^{i\theta_0}$，$\log z_0=\log r_0+i(\theta_0+2n\pi)$，

$h=\rho e^{i\theta_0}$，則 $\log(z_0+h)=\log(r_0+\rho)+i(\theta_0+2n\pi)$，故

$$\frac{1}{h}\{\log(z_0+h)-\log z_0\}=\frac{1}{\rho e^{i\theta_0}}\{\log(r_0+\rho)-\log r_0\}$$

$$\to\frac{1}{e^{i\theta_0}}\lim_{\rho\to 0}\frac{\log(r_0+\rho)-\log r_0}{\rho}=\frac{1}{r_0e^{i\theta_0}}=\frac{1}{z_0},$$

即得出与分支无关的

$$\frac{d}{dz}\log z=\frac{1}{z}. \tag{6.18}$$

9) **一般的冪** 这是实数情形的 $a^b=e^{b\log a}$ 到复数的推广，一般地写成 $z_1^{z_2}$ 的形状，其中 z_1, z_2 都是复数，結果是两个复变数的函数，我們定义为

$$z_1^{z_2}=e^{z_2\log z_1}, \tag{6.19}$$

但設 $z_1\neq 0$。

因此必須注意，不要忘記由 $\log z_1$ 产生的多值性。

10) **反三角函数** 即三角函数的反函数。由于三角函数能够用 az 及 e^z 的簡单結合定义出来，故反三角函数也能够用代数函数及 $\log z$ 的結合定义出来。这一表示方法对于看出它的多值性有时却很方便。

$$\sin^{-1}z=-i\log(iz+\sqrt{1-z^2}),$$

$$\cos^{-1}z=i\log(\sqrt{1-z^2}-iz),$$

$$\tan^{-1}z=\frac{1}{2i}\log\frac{i-z}{i+z}\quad(z\neq\pm i).$$

第3章　Cauchy 积分定理

§7　复变积分

1) Jordan 曲綫　实变数 t 在以实数 a, b $(-\infty<a<b<+\infty)$ 为端点的閉区間：$a\leqslant t\leqslant b$ 或半开区間：$a\leqslant t<b$ 上变化，Gauss 平面或复数球面上的点 $z(t)$ 单值并且連續地对应时，这一 $z(t)$ 叫做**連續曲綫**或 **Jordan 曲綫**。今后如果不另外声明而只叫曲綫时，即指这样的連續曲綫，t 叫做参变数。$z(t)$ 在 Gauss 平面时，把 $z(t)$ 分成实部与虚部，得出满足

$$z(t)=x(t)+iy(t) \tag{7.1}$$

的两个单值連續函数 $x(t)$ 及 $y(t)$. 由这一对应，区間 $[a\leqslant t\leqslant b]$ 或$[a\leqslant t<b]$的象是 Gauss 平面或复数球面的点集，但曲綫并非指这个点集，曲綫所給的点集尽管相同，参数表示若是不同，仍考虑作不同的曲綫。$z(a)$ 叫作曲綫的**始点**，$z(b)$ 叫作**終点**，这个曲綫叫做連結两点 $z(a)$ 及 $z(b)$. 另外，当定义域是閉区間 $[a\leqslant t\leqslant b]$ 时，这一曲綫的$[a\leqslant t<b]$对应的部分叫做由 $z(a)$ 出发趋近于 $z(b)$ 的曲綫。

其次，定义在 $a\leqslant t\leqslant b$ 的曲綫，对满足 $a<t_1<b$, $a\leqslant t_2\leqslant b$, $t_1\neq t_2$ 的 t_1, t_2，当 $z(t_1)=z(t_2)$ 成立时，点 $z(t_1)$ 叫做曲綫的**重点**，沒有重点的曲綫叫做**簡单曲綫**。另外，$z(a)=z(b)$ 成立时称这个曲綫为**閉曲綫**。在 Gauss 平面或复数球面給定一个域 G 及边界上一点 p，$z(b)$ 以外的曲綫上的点全包含在 G 内，且 $z(b)=p$ 的曲綫存在时，則 p 叫做自 G **可达**(accessible)的点。任意的域 G，在它的边界 F 上，自 G 可达的边界点是到处稠密的。这是因为命 p 为 F 上的任意点，作 p 点的任意 ε 邻域$(\varepsilon>0)$ $V_\varepsilon(p)$ 时，由于 $p\in F$，

故有属于 $V_\varepsilon(p)\cap G$ 的点 q 存在。用直綫(或大圆弧)連結 p 及 q，則在綫段(或圆弧) $\widehat{qp}$ 上有自 q 出发第一个超出 G 的点 p_1。故 $p_1\in V_\varepsilon(p)\cap F$，且为自 G 可达的边界点。

"Gauss 平面或复数球面上的簡单閉曲綫 Γ 把所余的部分分成沒有共同点的域 G_1 及 G_2，Γ 是它們的共同边界。并且 Γ 的所有点都是自 G_1, G_2 可达的边界点。"这一命題前一部分的証明，在 1882 年由 Jordan 最初給出，后半部則于 1908 年由 Schönfliess 首先証明的。

以曲綫 Γ 的定义域 $a\leqslant t\leqslant b$，或以 $a\leqslant t<b$ 所包含的閉区間 $c\leqslant t\leqslant d$ 为定义域的 Γ 的一部分，叫做 Γ 的**弧**(arc)。

2) **可度长曲綫** 以下专就 Gauss 平面上的曲綫考察。命定义域为 $a\leqslant t\leqslant b\ (-\infty<a<b<+\infty)$，曲綫 Γ 由单值連續函数 $z=z(t)$ 給出。今在区間 $a\leqslant t\leqslant b$ 上取 $n-1$ 个分点 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$ 作分割 $\Delta: t_0=a<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$，考察曲綫上的 $z(t_i)$ 点 $(i=1, 2\cdots, n-1)$，把相邻的点順次用直綫連結，由此得出的折綫的长为

$$\sum_{i=1}^{n}|z(t_i)-z(t_{i-1})|. \tag{7.2}$$

这一組数值如果与分点的个数及取法无关，且都为有穷时，这些值的上确界則是有穷的。这上确界叫做 Γ 的**长**，Γ 叫做**可度长曲綫**(rectifiable curve)。在上述分割中，$t_i-t_{i-1}(i=1, 2, \cdots, n)$ 中的最大值叫做分割的**范数**(norm)。

定理 1 取范数趋于 0 的分割列 $\Delta_\nu(\nu=1, 2, \cdots)$，其分点为 $t_0^\nu=a<t_1^\nu<t_2^\nu<\cdots<t_{n(\nu)-1}^\nu<t_{n(\nu)}^\nu=b$，則可度长曲綫 Γ 的长为

$$l(\Gamma)=\lim_{\nu\to\infty}\left\{\sum_{j=1}^{n(\nu)}|z(t_j^\nu)-z(t_{j-1}^\nu)|\right\}. \tag{7.3}$$

因此，例如把区間 $a\leqslant t\leqslant b$ 分成 ν 等分：$t_j^\nu=a+j(b-a)/\nu$ 的

分割列即可。

証明　命 ε 为任意指定的正数，則有某一分割 $\Delta:(a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b)$ 使

$$\sum_{i=1}^{n}|z(t_i)-z(t_{i-1})|>l(\Gamma)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面，由于 $z(t)$ 为 t 的一致連續函数，故有 $\eta(\eta>0)$ 存在，使当 $|t-t'|<\eta$ 时有

$$|z(t)-z(t')|<\varepsilon/(4n).$$

由于 Δ_ν 的范数收斂于零，对于 $\eta>0$ 有正整数 N 存在，使当 $\nu>N$ 时 Δ_ν 的范数小于 η。因此对于 $i=1,2,\cdots,n-1$，根据 $t^\nu_{j(i)-1}\leqslant t_i<t^\nu_{j(i)}$ 确定 $j(i)$。命 $j(0)=0$，$j(n)=n(\nu)$，則

$$\begin{aligned}l(\Gamma)&\geqslant\sum_{j=1}^{n(\nu)}|z(t^\nu_j)-z(t^\nu_{j-1})|\geqslant\sum_{i=1}^{n}|z(t^\nu_{j(i)})-z(t^\nu_{j(i)-1})|\\&\geqslant\sum_{i=1}^{n}|z(t_i)-z(t_{i-1})|-2\sum_{i=0}^{n}|z(t^\nu_{j(i)})-z(t_i)|\\&>l(\Gamma)-\frac{\varepsilon}{2}-2n\varepsilon/(4n)=l(\Gamma)-\varepsilon.\end{aligned}$$

3) **复数积分**　假定 Gauss 平面上連 α，β 两点的可度长曲綫为 Γ，在 Γ 上給定单值連續复变函数 $w=f(z)$。Γ 的参数表示为 $z=z(t)$ $(-\infty<a\leqslant t\leqslant b<+\infty)$，在区間 a，b 上嵌入分点 t_1，t_2，$\cdots$，t_{n-1} 而作出区間分割：

$$\Delta:\quad t_0=a<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b.$$

取含于小区間 $t_{i-1}\leqslant\tau_i\leqslant t_i$ 的任一点 τ_i，命 $\zeta_i=z(\tau_i)$，$z_i=z(t_i)$。作下列形状的和：

$$S_\Delta=\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i)(z_i-z_{i-1}).\qquad(7.4)$$

今命 Δ_ν 为一分割列，当 $\nu\to\infty$ 时它的范数收斂于零。这样对于 t 的函数 $w(t)=f(z(t))$，由于它是一致連續，故当 Δ_ν 的分点为 $t^\nu_0=a<t^\nu_1<t^\nu_2<\cdots<t^\nu_{n(\nu)-1}<t^\nu_{n(\nu)}=b$ 时，能使 $f(z(t))$ 在小区間

$t_{i-1}^{\nu}\leqslant t\leqslant t_i^{\nu}$ 的变动小于 $\varepsilon/l(\Gamma)$。这样的分割 Δ_ν, $\Delta_{\nu'}$ 中如一个的分点必是另一个的分点时，则 $|S_\Delta-S_{\Delta'}|<\varepsilon$。合并任意两个分割 Δ_ν, $\Delta_{\nu'}$ 的分点而得到的新分割用 $\Delta_\nu\cap\Delta_{\nu'}=\Delta^*$ 表示时，则有

$$|S_\Delta-S_{\Delta'}|\leqslant|S_\Delta-S_{\Delta^*}|+|S_{\Delta^*}-S_{\Delta'}|<2\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{\nu\to\infty}S_\Delta$ 一定存在。用符号

$$\int_\Gamma f(z)\,dz \quad 或 \quad (\Gamma)\int_\alpha^\beta f(z)\,dz$$

表示这一极限，叫作 $f(z)$ 沿曲綫 Γ 由 α 到 β 的**积分**（或**定积分**）。Γ 叫做这个积分的**积分路綫**。

显然，积分具有下列性质：

(1°) 积分对于被积函数 $f(z)$ 是綫性的。即 c_1, c_2 为任意两个复常数，$f_1(z)$, $f_2(z)$ 都是在 Γ 的連續函数时，则下式成立：

$$\int_\Gamma\{c_1f_1(z)+c_2f_2(z)\}\,dz=c_1\int_\Gamma f_1(z)\,dz+c_2\int_\Gamma f_2(z)\,dz. \quad (7.5)$$

(2°) 积分对于积分路綫来說是加法的。即假定 a, b, c 为满足 $-\infty<a<b<c<+\infty$ 的三个实数，二曲綫 Γ_1, Γ_2 各为用参变数 t 表示的可度长曲綫：$z=z_1(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, $z=z_2(t)$, $b\leqslant t\leqslant c$, 且 $\alpha=z_1(a)$, $\beta=z_1(b)=z_2(b)$, $\gamma=z_2(c)$。以 $\Gamma_1+\Gamma_2=\Gamma_3$ 为定义于 $a\leqslant t\leqslant c$ 在相应部分与 Γ_1, Γ_2 一致的曲綫，则 Γ_3 的长满足 $l(\Gamma_3)=l(\Gamma_1)+l(\Gamma_2)$。若 $f(z)$ 在 Γ_3 单值連續，则

$$\int_{\Gamma_3}f(z)\,dz=\int_{\Gamma_1}f(z)\,dz+\int_{\Gamma_2}f(z)\,dz. \quad (7.6)$$

(3°) 曲綫 Γ 的参数表示是 $a\leqslant t\leqslant b$, $z=z(t)$ 的时候，由 $z=z(b+a-t)$ 表示的曲綫写作 $-\Gamma$。$z(b)$ 是 $-\Gamma$ 的始点，$z(a)$ 是終点。称 $-\Gamma$ 为沿 Γ 相反方向移动的曲綫。$f(z)$ 若在 $-\Gamma$ 单值連續，显然

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=-\int_{-\Gamma}f(z)\,dz, \quad (7.7)$$

(4°) 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 定义的曲綫看作是点集时是一个有界閉集。因此在該曲綫上的单值連續函数有界，即使 $|f(z)|\leqslant M\ (z\in\Gamma)$ 成立的有穷正数 M 存在。由于

$$|S_\Delta|\leqslant\sum|f(\xi_i)|\,|z_i-z_{i-1}|\leqslant M\sum|z_i-z_{i-1}|\leqslant M\cdot l(\Gamma)$$

故

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right|\leqslant M\cdot l(\Gamma). \tag{7.8}$$

其次，就光滑曲綫考察。将 Gauss 平面上給定的曲綫 Γ 的参数表示为

$$z(t)=x(t)+iy(t),$$

其中 $x(t)$，$y(t)$ 分别为 $z(t)$ 的实部与虚部，如果对于 t 的导数 $x'(t)$，$y'(t)$ 在各点都存在、連續且不同时等于零，則这曲綫叫做**光滑曲綫**。由有穷个光滑曲綫所作(2°)中所說的和，叫做**逐段光滑曲綫**。

引理 定义在光滑曲綫上的两个函数 $x(t)$，$y(t)$ 是一致可导的。即对于任意給定的正数 $\varepsilon>0$，有正数 $\delta>0$ 存在，当 $0<|\Delta t|<\delta$ 时有

$$\left|\frac{\Delta z}{\Delta t}-z'(t)\right|<\varepsilon. \tag{7.9}$$

这是由中值定理

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}+i\,\frac{\Delta y}{\Delta t}=x'(t+\theta_1\Delta t)+iy'(t+\theta_2\Delta t)$$

$$(0<\theta_1,\ \theta_2<1),$$

$$z'(t)=x'(t)+iy'(t).$$

但 $x'(t)$，$y'(t)$ 一致連續，故当 $0<|\Delta t|<\delta$ 时，有 $|\Delta x'(t)|$，$|\Delta y'(t)|<\varepsilon/2$，故

$$\left|\frac{\Delta z}{\Delta t}-z'(t)\right|\leqslant|x'(t+\theta_1\Delta t)-x'(t)|+|y'(t+\theta_2\Delta t)-y'(t)|<\varepsilon.$$

今应用引理以証明关于置换的定理。

(5°) **置換法** 若 Γ 是光滑曲綫，参数表示是 $z=z(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$，則

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz=\int_{a}^{b} f(z(t))\,z'(t)\,dt, \tag{7.10}$$

其中 $f(z)$ 为 Γ 上的单值連續函数。

証明 $f(z)$ 在 Γ 連續，故有界：$|f(z)|\leqslant M$，M 为有穷值。其次，由于 Γ 是光滑曲綫，故由上述引理，对于任意給定的 $\varepsilon>0$ 有 $\delta>0$，只要 $0<|\Delta t|<\delta$，則

$$\left|\frac{\Delta z}{\Delta t}-z'(t)\right|<\varepsilon. \tag{7.11}$$

命 $a\leqslant t\leqslant b$ 的分割 Δ 的分点为 $t_0=a<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$，$z(t_i)=z_i\,(i=1, 2, \cdots, n)$，則

$$I_{\Delta}=\sum_{i=1}^{n} f(z_i)(z_i-z_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\,\frac{z_i-z_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}(t_i-t_{i-1}).$$

$$J_{\Delta}=\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\,z'(t_i)(t_i-t_{i-1}).$$

故假定 Δ 的范数小于 δ，則

$$\begin{aligned}|I_{\Delta}-J_{\Delta}| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\left\{\frac{z_i-z_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}-z'(t_i)\right\}(t_i-t_{i-1})\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}|f(z_i)|\left|\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)_{t_{i-1}}-z'(t_i)\right|(t_i-t_{i-1}) \\ &< M\varepsilon\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})=M\varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

另一方面，由积分定义，对于范数收斂于零的分割列，因为

$$\lim I_{\Delta}=\int_{\Gamma} f(z)\,dz, \quad \lim J_{\Delta}=\int_{a}^{b} f(z(t))\,z'(t)\,dt,$$

所以

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)\,dz-\int_{a}^{b} f(z(t))\,z'(t)\,dt\right|<M\varepsilon(b-a).$$

由于 ε 是任意数，故两者必須一致。

在实际求积分的值时，应用(7.10)很方便。

【例】 $f(z)=z^m(m=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$，积分路綫取为单位圆 $z(t)=e^{i2\pi t}$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$，积分路綫是沿圆周的正方向轉一周再回到原来的位置。$z(t)=e^{i2\pi t}=\cos 2\pi t+i\sin 2\pi t$，$z'(t)=-2\pi\{\sin 2\pi t-i\cos 2\pi t\}$，$\Gamma$ 是光滑曲綫，由(5°)有

$$\int_\Gamma z^m dz=\int_0^1 i2\pi z^{m+1}(t)\,dt=2\pi i\int_0^1\{\cos(m+1)2\pi t+i\sin(m+1)2\pi t\}dt,$$

若 $m\neq -1$ 时有 $$=\left[i\frac{\sin(m+1)2\pi t}{m+1}+\frac{\cos(m+1)2\pi t}{m+1}\right]_0^1=0,$$

若 $m=-1$ 时有 $$=2\pi i\int_0^1 dt=2\pi i.$$

【注意】 积分$\int_\Gamma f(z)dz$ 的定义利用了 $f(z)$ 在 Γ 連續，对于范数收斂于零的任意分割列 Δ_ν 作的和

$$S_{\Delta_\nu}=\sum_{i=1}^n f(\zeta_i)(z_i-z_{i-1})$$

当 $\nu\to\infty$ 时有极限。另一方面，由定理 1，对于相同的分割列 Δ_ν

$$\Gamma_{\Delta_\nu}=\sum_{i=1}^n|z_i-z_{i-1}|$$

当 $\nu\to\infty$ 时也有极限，这个极限我們已經知道等于 $l(\Gamma)$。利用这一結果，对于任意連續函数 $f(z)$，可以証明当 $\nu\to\infty$ 时，

$$U_{\Delta_\nu}=\sum_{i=1}^n f(\zeta_i)|z_i-z_{i-1}|$$

有极限。这一极限通常用符号

$$\int_\Gamma f(z)|dz|$$

表示。按这一記法，定理 1 可以写成

$$l(\Gamma)=\int_\Gamma|dz|. \tag{7.12}$$

特別若 Γ 是光滑曲綫，把定理(5°)的証明重复一遍，則得

$$l(\Gamma)=\int_\Gamma|dz|=\int_a^b|z'(t)|dt=\int_a^b\sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2}\,dt. \tag{7.13}$$

(6°) **一致收斂函数列的积分** 在 Gauss 平面可度长的簡单曲綫 Γ 上定义的单值連續函数列 $f_n(z)$ 在 Γ **一致收斂**，設它的极限函数是 $f(z)$，則給任意正数 ε，有充分大的正整数 $N=N(\varepsilon)$ 存

在，当 $n>N$ 时有

$$|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon/L,$$

其中 L 为 Γ 的全长。与前述一样，$f(z)$ 既在 Γ 連續，

$$\int_\Gamma f(z)\,dz$$

有意义，并由(1°)及(7.8)，只要 $n>N$，則

$$\left|\int_\Gamma f_n(z)\,dz-\int_\Gamma f(z)\,dz\right|=\left|\int_\Gamma \{f_n(z)-f(z)\}\,dz\right|$$
$$<(\varepsilon/L)\cdot L=\varepsilon,$$

卽下式成立：

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Gamma f_n(z)\,dz=\int_\Gamma f(z)\,dz.$$

这个結果改成級数的情形自然也适用。卽假定級数

$$f_1(z)+f_2(z)+\cdots=F(z)$$

的各項在可度长簡单曲綫 Γ 上单値連續，且一致收斂，則 $F(z)$ 也連續，且下式成立：

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=\int_\Gamma f_1(z)\,dz+\int_\Gamma f_2(z)\,dz+\cdots.$$

§8 函数論的基本定理

1) 定积分的逼近 为了把 Cauchy 积分定理在广泛的形式下加以証明，我們首先敍述关于定积分逼近的定理作为准备。

引理 1 Γ 为 Gauss 平面可度长簡单閉曲綫，它的长是 L，Γ 包圍的域用 D 表示。任給正数 δ，有包含在 D 内而周长小于 $6L$ 的多角形 π 及自然数 $n=n(\delta)$ 存在，把 Γ 及 π 各分为 n 个弧 Γ_1, Γ_2, $\cdots$, Γ_n 及 π_1, π_2, $\cdots$, π_n，并具下列性质：

(1) $\Gamma_i\cup\pi_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 的任意两点 a, b 間的距离小于 δ.

(2) 弧 Γ_i, π_i 的終点分别是 P_i 及 Q_i，则綫段 P_iQ_i 除点 P_i 外，其他点全在 D 内。

証明 設曲綫 Γ 表示为单位圓周 $e^{i\theta}(-\infty<\theta<+\infty)$ 的一对一双方連續的象，θ 增大时 Γ 上的点移动使 D 在 Γ 的左側。定理中的自然数 n 滿足 $n\delta>12L(n\geqslant 3)$ 就够了。其次，取 S_0 为 Γ 上的任意点，把 L 按弧长 n 等分，它的分点由 S_0 出发按 θ 增加方向为 $S_1, S_2, \cdots, S_{n-1}, S_n=S_0$。弧 $S_{i-1}S_i$ 的长恰好是 L/n。这里各以 $S_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为中心、充分小的半徑 r 画圓 $C(S_i)$。使 $C(S_i)$ 彼此不相交，且对于 $C(S_i)\cap\Gamma$ 的 θ 比 $C(S_{i-1})\cap\Gamma$ 对应的 θ 都大。这是由于 Γ 及 θ 的对应为两側連續。取 $C(S_i)$ 内 D 的任意点 R_i 与 S_i 作联綫。在这一綫段上，由 R_i 出发向 S_i 前进时最初与 Γ 的交点为 P_i，P_i 按 θ 增大的顺序在 Γ 上排列着，若与 P_i 对应的 θ 为 θ_i，则 $\theta_0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_{n-1}<\theta_n=\theta_0+2\pi$。

把弧 $P_{i-1}P_i$ 叫作 Γ_i，则由以上的作图显然知道，对于所有的 i，Γ_i 的长不能超过 $3L/n$。并且因 R_iP_i 的长小于 r，故也小于 L/n。以上的图形表示如图 8.1 的(1)。

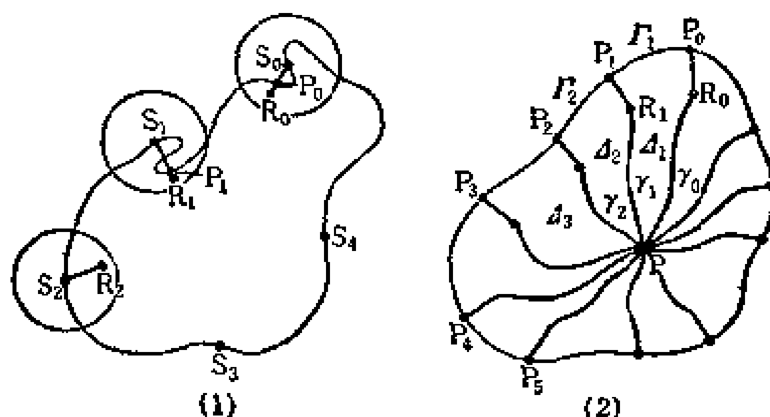


图 8.1

其次，固定 D 内的一点 P，由 P 出发作彼此不相交的曲綫 $\gamma_i(i=0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 連結 R_i。如图 8.1(2)。綫段 P_iR_i 与 Γ 的弧 $P_{i-1}P_i$ 除端点外彼此不相交，把 P, γ_{i-1}, R_{i-1}, P_{i-1}, P_i, R_i,

γ_i,P 包圍的域叫做 Δ_i, 則 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ 圍繞点 P, 和它們的边界一起复蓋 D. 这些事实都如图 8.1(2) 所表示。

再来作多角形 π 的图。为此，先命 Γ 与 $\bigcup_{i=1}^{n}\gamma_i$ 的距离为 ρ. 命弧 Γ_i 的长为 L_i, 选滿足 $n_i\rho>2L_i$ 的自然数 n_i, 把弧 Γ_i 分成 $2n_i$ 等分，这些分点按 Γ_i 正向的順序为 $p_0^i=\mathrm{P}_{i-1}, p_1^i, p_2^i, \cdots, p_{2n_i}^i=\mathrm{P}_i$. 其次，在这些分点中用具奇数足碼的点 $p_{2j-1}^i(j=1, 2, \cdots, n_i)$ 为中心，作边长为 $\frac{5}{4}(L_i/n_i)$ 的正方形，且它們的边都平行于实軸或虚軸(正方形的周长为 $5L_i/n_i$). 因为相邻正方形的中心距离不超过 L_i/n_i, 故相邻的正方形有重合的部分，它們的全体包含 Γ_i 在其內部，正方形周界全体或最外层周界的一部构成包含 Γ_i 在其内部的多角形 G_i, 它的周界不超过 $n_i 5L_i/n_i=5L_i$. 另外，正方形內部的点与中心的距离不超过

$$\sqrt{2}\,(5/8)\,(L_i/n_i)<\rho,$$

故 R_{i-1}, R_i 在这个多角形的外边。这个多角形周界(的点之中可用在多角形外边且在 Δ_i 内部的折綫与 P 連結)的一部分 C_i 自

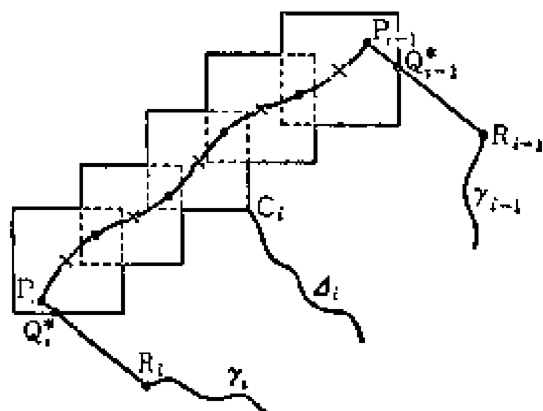


图 8.2

綫段 $\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{R}_{i-1}$ 的一点 Q_{i-1}^* 开始横穿域 Δ_i 到达 $\mathrm{P}_i\mathrm{R}_i$ 的一点 Q_i^{**} 而止。对于全体的 $i(i=1, 2, \cdots, n)$, Q_i^{**} 及 Q_i^* 二点中，与 P_i 靠近的点叫做 Q_i, 則綫段 $\mathrm{Q}_{i-1}\mathrm{Q}_{i-1}^*$, 路綫 C_i, 綫段 $\mathrm{Q}_i^{**}\mathrm{Q}_i$ 的併就是欲求的折綫 π_i(其中包括 $\mathrm{Q}_{i-1}\mathrm{Q}_{i-1}^*$ 及 $\mathrm{Q}_i^{**}\mathrm{Q}_i$ 都(或其中之一)縮为一点的情形)。$\pi_i(i=1,2,3,\cdots,n)$ 的全部沿 Γ 的方向圍繞 P 旋轉一周是明显的。用 π 表示 π_i 的全体，π 在 D 的內部，注意 $\mathrm{Q}_{i-1}\mathrm{Q}_{i-1}^*$ 及 $\mathrm{Q}_i^{**}\mathrm{Q}_i$ 的部分不超过 n 个，π 的全长不大于

$$\sum(5L_i)+n(L/n)=5\sum_{i=1}^{n}L_i+L=6L.$$

因为 Γ_i 的长 L_i 滿足 $3L/n<\delta/4$，故两点 a, b 在 Γ_i 时，则 a, b 間的距离 $\rho(a, b)$ 小于 δ。今任取 $\Gamma_i\cup\pi_i$ 上两点 a, b，若 a, b 在 C_i 上，命 a, b 所在的正方形的中心各为 a', b'，若在綫段 $Q_{i-1}Q_{i-1}^*$ 上，命 P_{i-1} 为 a', b'，若在綫段 $Q_iQ_i^*$ 上，命 P_i 为 a', b'。既是 $a', b'\in\Gamma_i$，故 a, a' 的距离 $\rho(a, a')$，b, b' 的距离 $\rho(b, b')$ 由于 $\sqrt{2}(5/8)(L_i/n_i)<L_i<\delta/4$，$L/n<\delta/12$，都不能超过 $\delta/4$。所以不管那一种情形，都有

$$\rho(a, b)\leqslant\rho(a, a')+\rho(a', b')+\rho(b', b)<3(\delta/4)<\delta.$$

应用引理 1，可以証明下列定积分逼近的定理。

定理 1 Γ 为 Gauss 平面上可度长簡单 Jordan 閉曲綫，D 为由 Γ 包圍的域。今假定单値复变函数 $w=f(z)$ 在 D 内正則，在閉域 $D\cup\Gamma$ 連續。于是，任給正数 ε，在 D 的内部作多角形 π，能够滿足

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz-\int_\pi f(z)dz\right|<\varepsilon. \tag{8.1}$$

証明 由于假設了 $f(z)$ 在有界閉域 $D\cup\Gamma$ 連續，故在該处一致連續。因此任給正数 ε，有正数 δ 存在，使得 $D\cup\Gamma$ 的任意两点 z, z' 当 $|z-z'|<\delta$ 时，以下不等式成立：

$$|f(z)-f(z')|<\varepsilon/(9L), \tag{8.2}$$

其中 L 为曲綫 Γ 的全长。

其次由引理，在 D 内作多角形 π，使它的周界全长不超过 $6L$，并且把 Γ 及 π 分成 n 个相同个数的弧：$\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n$ 及 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$，使其具有引理中所述的性质。因此对于 $i=1, 2, \cdots, n$ 的各 i 可以考虑路綫

$$\eta_i=\Gamma_i+P_iQ_i+\pi_i+Q_{i-1}P_{i-1}.$$

沿这个路綫变动的順序是使 D 处于 Γ_i 的左边，P_iQ_i 及 $Q_{i-1}P_{i-1}$ 依照字母的順序，π_i 为由 Q_i 出发向 Q_{i-1} 进行。这样的路綫是可

度长的閉曲綫,故由积分的定义,有

$$\int_{\eta_i} f(\mathrm{P}_i)dz=f(\mathrm{P}_i)\int_{\eta_i} dz=0.$$

因此

$$\int_{\eta_i} f(z)dz=\int_{\eta_i}\{f(z)-f(\mathrm{P}_i)\}dz. \tag{8.3}$$

关于 i 两端取和,綫段 $\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_i$ 部分出現两次,但每次方向相反,故由定积分的性质(3°)知道这两部分抵消。卽有

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\eta_i} f(z)dz=\int_{\Gamma} f(z)dz-\int_{\pi} f(z)dz$$

(其中最后項中 π 的方向与 Γ 关于 P 的方向相同)。因此有

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz-\int_{\pi} f(z)dz\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{\eta_i}|f(z)-f(\mathrm{P}_i)||dz|. \tag{8.4}$$

这样只要 $z\in\eta_i$,由引理中的性质(1)有 $|z-\mathrm{P}_i|<\delta$,故当 $z\in\eta_i$ 时 $|f(z)-f(\mathrm{P}_i)|<\varepsilon/(9L)$。故(8.4)的右端小于

$$[\varepsilon/(9L)]\sum_{i=1}^{n}\int_{\eta_i}|dz|.$$

但 η_i 的长的和为 Γ 的全长、π 的全长、綫段 $\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_i$ 的二倍的和的总和,故小于 $9L$。

有了以上的准备后进而轉到 Cauchy 定理。

2) **Cauchy 定理** 下述定理 2 及定理 3 是 Cauchy 于 1825 年的論文 "Mémoire sur les intégrales définies prieses entre des limites imaginaires"中首先給出的。它在复变函数論的結构中起着基本的作用,因此現在叫做**函数論的基本定理**。

定理 2 D 为 Gauss 平面的有界域,它的边界为可度长簡单閉曲綫 Γ。$f(z)$ 为定义在 D 及包含边界的閉域 $D\cup\Gamma$ 上的单値复变函数,在 $D\cup\Gamma$ 連續,在 D 內各处正則。于是

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=0. \tag{8.5}$$

証明 由定理1，对于任意給定的实数 $\varepsilon>0$，作 D 内的多角形 π，使

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)\,dz-\int_{\pi} f(z)\,dz\right|<\varepsilon.$$

因此对于这样的 π 如果能証明

$$\int_{\pi} f(z)\,dz=0, \tag{8.6}$$

則定理的証明就够了。

因为 π 是多角形，由其内部任取一点 P，由 P 点到 π 的各頂点的距离至少有一个是最大。命其中的一个为 A，与 A 相邻的頂点为 B，C，若三角形 ABC 的边 BC（端点除外）全部包含在 π 内，則 π 分成 △ABC 及其余的部分，剩余部分頂点的个数比 π 頂点的个数少一个。設 △ABC 内，或其边界上除 A，B，C 外尚有 π 的頂点，假定其中与 A 距离最近的頂点为 E，連 E，A 后，π 就被分成如图8.3的两个多角形，而两个多角形頂点的个数都至少比 π 少一个。因此由数学归納法知道，π 能够分成有穷个三角形。

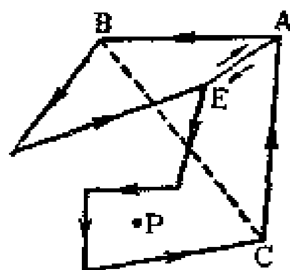


图 8.3

由分割而新添入的綫段上的积分方向相反地走了一个来回，因此这一部分的积分和为零，故不失普遍性，最初起即可认为 π 为三角形，而 $f(z)$ 在其内部及边界上为正則。

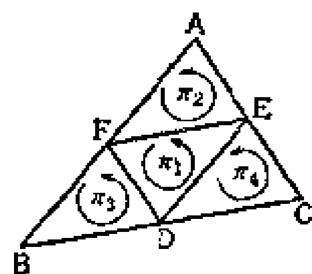


图 8.4

今命 π 为上面所說那样的三角形，取三角形各边的中点，把它分成四个全同三角形，称之为对 π 施行分割。这四个三角形的每一三角形的周界是 π 周界的 $\frac{1}{2}$，在这样的周界上定方向如图 8 4，得出四个路綫 π_1，π_2，π_3，π_4。显然

$$\int_{\pi} f(z)\,dz=\int_{\pi_1} f(z)\,dz+\int_{\pi_2} f(z)\,dz+\int_{\pi_3} f(z)\,dz+\int_{\pi_4} f(z)\,dz.$$

因此令 $I=\int_{\pi} f(z)\,dz$，則 π_1，π_2，π_3，π_4 中至少有一个(命其周界为 Δ_1，它也代表周界及其內部)滿足

$$\left|\int_{\Delta_1} f(z)\,dz\right|\geqslant |I|/4.$$

对于 Δ_1 再施行分割，則得出包含在 Δ_1 内的四个全同三角形，它們每一个的周界为 π 周界的 $1/4$，在这四个三角形中至少有一个三角形(命其周界为 Δ_2)滿足

$$\left|\int_{\Delta_2} f(z)\,dz\right|\geqslant |I|/4^2.$$

这样继續作下去，依次得到以下的閉三角形列

$$\Delta_1\supset\Delta_2\supset\cdots\supset\Delta_\nu\supset\cdots.$$

用 $l(\Delta_\nu)$ 表示 Δ_ν 周界的长，則下式成立：

$$\left|\int_{\Delta_\nu} f(z)\,dz\right|\geqslant |I|/4^\nu,\quad l(\Delta_\nu)=l(\pi)/2^\nu. \tag{8.7}$$

因为 Δ_ν 含于 π 的內部及其边界所成閉三角形 $\bar{\pi}$ 內，故 $\bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty}\Delta_\nu$ 为一点 Q 所构成，且 Q 为 $\bar{\pi}$ 的点。因 $f(z)$ 在 Q 点正則，故在 Q 可导。任意給定正数 ε，有正数 δ 存在，当 $|z-Q|<\delta$ 时有

$$\left|\frac{f(z)-f(Q)}{z-Q}-f'(Q)\right|<\varepsilon/L^2,\quad L=l(\pi),$$

或

$$f(z)=f(Q)+f'(Q)(z-Q)+\varepsilon(z)(z-Q), \tag{8.8}$$
$$|\varepsilon(z)|<\varepsilon/L^2.$$

因为当 $\nu\to\infty$ 时 Δ_ν 的周长收斂于零，故有正整数 ν_0 存在，当 $\nu>\nu_0$ 时 Δ_ν 包含在圓 $|z-Q|<\delta$ 的內部。更因 $Q\in\Delta_\nu$，故当 $z\in\Delta_\nu$ 时有 $|z-Q|<l(\Delta_\nu)$.

其次，把 (8.8) 代入(8.7)，还需要 Cauchy 定理的两个特殊

情形

$$\int_{\Delta_\nu} dz=0,\quad \int_{\Delta_\nu} z\,dz=0. \tag{8.9}$$

因此我們应当首先証明(8.9)。(8.9)的第一式直接应用定积分定义即可求出；至于(8.9)的第二式，由于連两点 α, β 的綫段可以表示为 $z=\alpha+(\beta-\alpha)t\ \ (0\leqslant t\leqslant 1)$，故由 §7 的(5°)，有

$$\int_\alpha^\beta z\,dz=\int_0^1 \{\alpha+(\beta-\alpha)t\}(\beta-\alpha)dt=(\beta-\alpha)\left\{\alpha+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2).$$

把这一結果应用到以 α, β, γ 为頂点的三角形 Δ 的三边，則

$$\int_\Delta z\,dz=\frac{1}{2}\{(\beta^2-\alpha^2)+(\gamma^2-\beta^2)+(\alpha^2-\gamma^2)\}=0.$$

这就完全証明了(8.9)。

由(8.9)得出

$$\int_{\Delta_\nu} f(Q)\,dz=0,\quad \int_{\Delta_\nu} f'(Q)(z-Q)\,dz=0.$$

把(8.8)代入(8.7)，有

$$\left|\int_{\Delta_\nu} f(z)\,dz\right|=\left|\int_{\Delta_\nu} \varepsilon(z)(z-Q)\,dz\right|\leqslant\int_{\Delta_\nu}|\varepsilon(z)|\,|z-Q|\,|dz|$$

$$<(\varepsilon/L^2)l(\Delta_\nu)\ l(\Delta_\nu)=\frac{\varepsilon}{L^2}\left(\frac{L}{2^\nu}\right)^2=\varepsilon/4^\nu.$$

故由(8.7)

$$|I|/4^\nu<\varepsilon/4^\nu \quad 即 \quad |I|<\varepsilon.$$

ε 为任意正数，故 $I=0$。即証明了(8.6)。定理 2 証毕。

把 Cauchy 积分定理推广到复連通域时，虽然沒有什么困难，但这时需要关于积分路綫方向的定义。这时可以用在引理 1 所用的方法。設 Γ 是含于域 D 边界的一个簡单曲綫，在 Γ 上自 D 可达的点至少有三个以上。

命这样的点为 a, b, c，于 D 内任取一点 P，用全在 D 内且彼此不相交的曲綫 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 联 P 及 a, b, c。这时在 P 的附近，假定 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 都是折綫，这些折綫最后的綫段給出繞 P 点旋轉的順序。这个旋轉順序的正負确定 Γ 上点的移动对 D 的正負。图 8.5 是由三根簡单閉曲綫所界的三連通域 D，图中所給的曲綫方向是正方向。

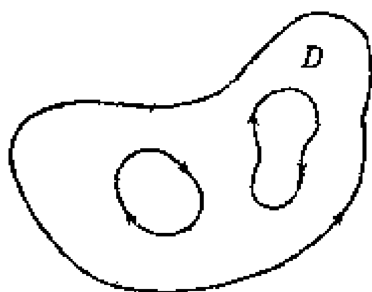


图 8.5

由以上的定义，可以把 Cauchy 积分定理推广到复連通域的情形。

定理 3 命 D 为 Gauss 平面上 n 个彼此不相交的可度长簡单閉曲綫 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n$ 所包圍的 n 連通域，$\Gamma=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Gamma_i$。假定单值复变函数 $f(z)$ 在閉域 $D\cup\Gamma$ 連續，在 D 的內部各点正則，则

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_i}f(z)\,dz=0 \tag{8.10}$$

成立。其中 $f(z)$ 在 Γ_i 上的积分是按点 z 在 Γ_i 上动的方向关于域 D 为正方向进行的。Γ 的各部分这样规定方向时，(8.10) 可以簡单地写成

$$\int_{\Gamma}f(z)\,dz=0.$$

証明 Γ_i 上任意一点的邻域內，有借除端点外全部包含在 D 內的綫段可达的边界点（参看引理 1 的証明）。因此在 Γ_1, Γ_2 上任取两点 $a\in\Gamma_1, b\in\Gamma_2$，在各該点的邻域內分别有点 a_1, b_1 存在，使得 $a_1\in\Gamma_1$，$b_1\in\Gamma_2$，并且可用除端点外全部在 D 內的可度长曲綫（折綫）連結起来。命这一曲綫为 γ_1，由 a_1 出发沿 Γ_1 关于 D 的正向轉一周回到 a_1，其次經 γ_1 到达 b_1，再由 b_1 出发沿 Γ_2 关于 D 的正向轉一周后回到 b_1，再沿 γ_1 与前相反的方向到 a_1，如这样的曲綫叫作 Γ_1^*，则由于

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz+\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz=\int_{\Gamma_1^*} f(z)\,dz,$$

只須証明 $\int_{\Gamma_1^*} f(z)\,dz+\sum_{i=3}^{n}\int_{\Gamma_i} f(z)\,dz=0$, 定理即为全部証明了。由 D 去掉 γ_1 后所余的部分叫作 D_1, 則 D_1 为 $(n-1)$ 連通域，而 Γ_1^* 是对于 D_1 具正向的边界綫之一。故問題归結为 $(n-1)$ 連通域的情形。另一方面，$n=1$ 的情形就是定理 2, 故定理 3 証毕。



图 8.6

应用定理 3 在被积函数 $f(z)$ 正則的域 D 内可以考虑**改变积分路綫**。

【例 1】 D 是 Gauss 平面上的单連通域，假定 $f(z)$ 在 D 上各点是单值正則的复变函数，a 及 z 为 D 内的任意两点，則对于連結 a 及 z 的任意两条可度长簡单曲綫 γ_1, γ_2 有

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz=\int_{\gamma_2} f(z)\,dz. \tag{8.11}$$

这是由于这两个积分，用与証明定理 1 同样的方法，把 γ_1, γ_2 换成折綫 π_1, π_2 后，可以任意地逼近原来的积分。折綫的情形依照 γ_1, γ_2 所作的多边形的个数为有限个，变更积分路綫使多边形的个数依次减少，容易看出 (8.11) 成立。

因此 (8.11) 所給的积分只与 a 及 z 有关，而与在 D 内連結 a 及 z 的积分路綫无关。因此可以写成下列形状：

$$\int_a^z f(z)\,dz,$$

叫做 $f(z)$ 在 D 的不定积分。用 $F(z)$ 表示这一积分，容易証明

$$\frac{dF(z)}{dz}=f(z).$$

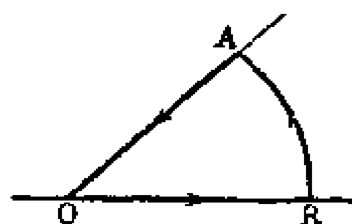


图 8.7

【例 2】 函数 e^{iz^2} 在 Gauss 平面任何点都是单值正則的，故沿图 8.7 所示的圆心角为 $\frac{\pi}{4}$ 的扇形周界 ORA 的积分为零，即

$$\left(\int_{OR}+\int_{RA}+\int_{AO}\right)e^{iz^2}dz=0.$$

在第一个积分中，命 $R\to+\infty$ 取极限，得

$$\int_{OR} e^{iz^2}dz \to \int_0^\infty \cos x^2 dx + i\int_0^\infty \sin x^2 dx.$$

第二个积分中，命积分变数为 $z=Re^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，则

$$\left|\int_{RA} e^{iz^2}dz\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{i2\theta}} Ri d\theta\right| \leqslant R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2\theta}d\theta < R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\theta}d\theta$$

$$=R\left[-\frac{e^{-R^2\theta}}{R^2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} < \frac{1}{R}\to 0.$$

最后，关于第三积分，它的积分变数为 $z=[(1+i)/\sqrt{2}]t$，$0\leqslant t\leqslant R$，($z^2=it^2$)，故

$$\int_{AO} e^{iz^2}dz = \int_R^0 e^{-t^2}\frac{1+i}{\sqrt{2}}dt \to -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt - \frac{i}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt.$$

实部及虚部应分别为零，故

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt.$$

【例 3】 e^{iz}/z 在 $z\neq0$ 为单值正則，因此在图 8.8 所示的沿在第一象限的路綫 ABCD 的积分为零，

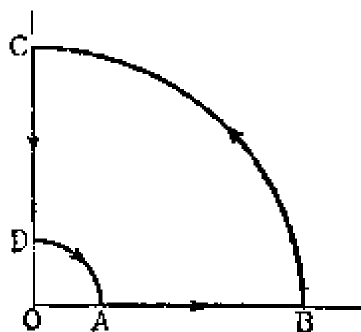


图 8.8

$$\left(\int_A^B+\int_B^C+\int_C^D+\int_D^A\right)(e^{iz}/z)dz=0.$$

在第一个积分中，命 $|A|=r$，$|B|=R$，則

$$\int_r^R \frac{\cos x}{x}dx + i\int_r^R \frac{\sin x}{x}dx,$$

第三积分为

$$-\int_r^R \frac{\cos y}{y}dy,$$

故两者的和为

$$i\int_r^R \frac{\sin x}{x}dx.$$

第二积分中，命 $z=Re^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，則

$$\left|\int_B^C\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{iRe^{i\theta}}\cdot i d\theta\right| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|e^{iRe^{i\theta}}\right|d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R(\theta/2)}d\theta$$

$$=\left[-\frac{2}{R}e^{-\frac{2}{R}\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} < \frac{2}{R}\to 0 \quad (R\to\infty \text{ 时}).$$

第四积分中,命 $z=re^{i\theta}, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$, 注意到积分路綫的方向, 則

$$\int_D^A=-\int_A^D=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ire^{i\theta}}\cdot id\theta.$$

当 $r\to 0$ 时由于 $e^{ire^{i\theta}}$ 关于 θ 为一致收斂于 1, 故

$$\int_D^A\to -i\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=-i\,\frac{\pi}{2}.$$

故四个积分的和当 $r\to 0$, $R\to+\infty$ 时收斂于极限值 $i\left\{\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx-\frac{\pi}{2}\right\}$. 另一方面,前面已經知道它們的和恒为零,故

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

§9　积 分 表 示

1) Cauchy 积分公式　Cauchy 积分定理的重要性在于由它可以得出用域的边界上的值表示正則函数的积分公式，而通过后者才能够展开 Cauchy 的复变函数理論。

定理 1　命 D 为 Gauss 平面上有界的 n 連通域，边界是由 n 个可度长簡单閉曲綫 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n$ 构成的。$f(z)$ 在 D 及其边界所构成的閉域单值連續,在 D 的內部各点正則。假定 Γ 是关于 D 为正向的曲綫 $\Gamma_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 之併, 則对于滿足 $z\in D$ 的所有 z, 常有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}dz. \tag{9.1}$$

証明　因为 z 是 D 內部的点，故以 z 为中心、充分小的 r 为半徑作圓 $K(r)$，命 $K(r)$ 是关于它的內部为正向的曲綫,由 D 去掉这一小圓及其內部所余的域为 $D(r)$，則

$$f(\zeta)/(\zeta-z)$$

作为 ζ 的函数，在 $D(r)$ 內及其边界所构成的閉域单值連續，在 $D(r)$ 內正則,故由 §8 定理 3 在 $D(r)$ 的边界上的积分为零,即

$$\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\int_{K(r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=0$$

(第二积分前面的负号是由于 $K(r)$ 关于 $D(r)$ 是负向的)。第二积分的积分路綫可表示为 $\zeta=z+re^{i\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$。这时候 $\zeta-z=re^{i\theta}$, $d\zeta=rie^{i\theta}d\theta$, 任給正数 ε, 取 r 充分小,則 $f(\zeta)$ 可以写成

$$f(\zeta)=f(z)+\varepsilon(\zeta-z),\quad |\varepsilon(\zeta-z)|<\varepsilon,$$

故

$$\int_{K(r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\int_0^{2\pi}\{f(z)+\varepsilon(\zeta-z)\}id\theta=2\pi if(z)+i\int_0^{2\pi}\varepsilon(\zeta-z)d\theta.$$

更因 $\left|\int_0^{2\pi}\varepsilon(\zeta-z)\,d\theta\right|\leqslant\int_0^{2\pi}|\varepsilon(\zeta-z)|\,|d\theta|<2\pi\varepsilon$, 所以

$$\left|\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-2\pi if(z)\right|<2\pi\varepsilon,$$

ε 是任意正数,从而(9.1)一定成立。

【注意】 (9.1)为以 Γ 上 $f(\zeta)$ 的值表示 D 内 $f(z)$ 值的公式,通常叫做 **Cauchy 积分公式**。在这一公式中,假定 z 在閉域 $D\cup\Gamma$ 的外边,則单值函数

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$$

在 $\zeta\in D\cup\Gamma$ 时連續、且在 $\zeta\in D$ 时正則。故由 Cauchy 积分定理下式成立:

$$\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=0,\quad z\overline{\in}D\cup\Gamma. \tag{9.2}$$

其次,为了考察 z 在曲綫上的情形,給曲綫及 $f(z)$ 加一些条件。

作成边界的曲綫 Γ_1, Γ_2, $\cdots$, Γ_n 中有一个在最外边,例如命 Γ_1 表示这一曲綫,則其他的 Γ_2, Γ_3, $\cdots$, Γ_n 全在 Γ_1 的內部且彼此互在外部。設問題对象的 z 在这些曲綫中的某一个上,例如在 Γ_2 上,并設 $f(z)$ 不只在 D 内,在 Γ_2 上及其內部域內各点也正則。同时 Γ_2 不仅是簡单閉曲綫,而是由有穷个光滑曲綫弧的併构成的。

在这种情况下,为了考察在 $z(z\in\Gamma_2)$ 附近的情况,只須考慮两个光滑曲綫弧相交于 z,交角为 Ω 的情形。(不是这样的話,即 z 在一根光滑曲綫上时,可設 $\Omega=\pi$。)

在这一情况下,如同定理1的証明那样,以 z 为中心、充分小的 r 为半徑

作圆 $K(r)$，则 $K(r)$ 在 D_1 的内部，且 $K(r)$ 的圆周被 Γ_2 分为两部分。如图

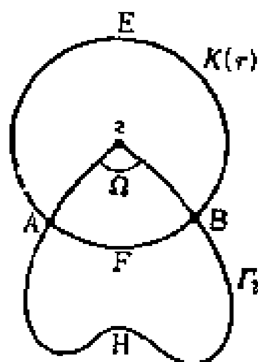


图 9.1

9.1 所示，在 Γ_2 内部的叫作 AFB，在 Γ_2 外部的叫作 BEA。同样 Γ_2 被点 A，B 分成圆外的部分即图形上的 AHB，及圆内的部分即弧 BzA。这里先就两个前者的部分合成的 AHBFA 加以考察，其中一部分含于 Γ_2，另一部分含于 $K(r)$。这是可度长的简单閉曲綫，且 z 在这一曲綫的外边。故由(9.2)有

$$\int_{AHBFA}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=0. \tag{9.3}$$

这一积分在圆弧上的部分，因为 $\zeta-z=re^{i\theta}$，$\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$，其中 $A=z+re^{i\theta_1}$，$B=z+re^{i\theta_2}$，更因 $f(\zeta)$ 在 $\zeta=z$ 附近連續，故可表示为

$$f(\zeta)=f(z)+\varepsilon(\zeta-z),\quad |\varepsilon(\zeta-z)|<\varepsilon,$$

从而有

$$\int_{BFA}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=-\int_{\theta_1}^{\theta_2}\{f(z)+\varepsilon(\zeta-z)\}id\theta$$

$$=-i(\theta_2-\theta_1)f(z)-i\int_{\theta_1}^{\theta_2}\varepsilon(\zeta-z)d\theta.$$

当 $r\to0$ 时最后的积分趋于零，$\theta_2-\theta_1\to\Omega$，故由(9.3)

$$\lim_{r\to0}\int_{AHB}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=i\Omega f(z),$$

即得出以下的公式：

$$f(z)=\frac{1}{i\Omega}\lim_{r\to0}\int_{AHB}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{9.4}$$

上式右端的积分虽然不得在 Γ_2 上考虑，但在 Γ_2 的弧 AHB 上积分之后，取 $r\to0$ 时的极限值是可以考虑的。这个极限叫做 Γ_2 上积分的 **Cauchy 主值**。一般用以下的符号表示：

$$(\mathrm{P})\int_{\Gamma_2}.$$

(9.4) 用这一符号表示时，则为

$$f(z)=\frac{1}{i\Omega}(\mathrm{P})\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{9.5}$$

若 z 在 Γ_2 的内部时，Ω 可认作是 2π。若在外部则 Ω 认作是零。在这种意义下，(9.5) 可考虑为 (9.2) 及 (9.1) 的一般形式。

2) 关于导数的积分表示，Goursat 定理 首先就一般的"不一定是閉的"可度长簡单曲綫 C 有下列定理。

定理 2 C 是 ζ 平面上可度长簡单曲綫，复变函数 $f(\zeta)$ 在閉集 C 上单值連續。这时命 z 为不在 C 上的任一点，則

$$J(z)=\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\overline{\in}C \tag{9.6}$$

是 z 的正則函数（意思説，在任意点 $z_0(z_0\overline{\in}C)$ 的邻域定义的正則函数），对于 z 的导数为

$$J'(z)=\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta. \tag{9.7}$$

一般的高次导数 $n=2, 3, \cdots$，有

$$J^{(n)}(z)=n!\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta. \tag{9.8}$$

証明 命 h 为异于 0 的它的模为任意小的复数，因 C 为閉集，z 及 $z+h$ 都不在 C 上，故 $J(z+h)$ 及 $J(z)$ 同时存在，且

$$\frac{J(z+h)-J(z)}{h}=\left(\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z-h}\,d\zeta-\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right)\frac{1}{h}$$

$$=\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z-h)}\,d\zeta.$$

命 M 为 $|f(\zeta)|$ 关于 $\zeta\in C$ 的最大值，L 为 C 的全长，δ 为 z 及 $z+h$ 与 C 的距离，因 $\delta>0$，故

$$\left|\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z-h)}d\zeta-\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right|$$

$$=\left|\int_C \frac{hf(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-h)}\right|\leqslant M|h|L/\delta^3.$$

令 $h\to 0$，則不等式的右端趋于零，故

$$J'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{J(z+h)-J(z)}{h}=\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta.$$

这个关系式在 z 的邻域的所有点都成立，故 $J(z)$ 在 z 点正則，且它的导函数由 (9.7) 給出。

高阶的情形可以完全类似地推出，今只就 $n=2$ 的情形討論。由(9.7)有

$$\frac{J'(z+h)-J'(z)}{h}=\int_C\frac{f(\zeta)}{h}\left\{\frac{1}{(\zeta-z-h)^3}-\frac{1}{(\zeta-z)^3}\right\}d\zeta$$
$$=\int_C f(\zeta)\frac{2\zeta-2z-h}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-h)^2}d\zeta.$$

若 M, L, δ 和前面所表示的完全一样，则

$$\left|\frac{J'(z+h)-J'(z)}{h}-2\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3}d\zeta\right|$$
$$\leqslant M|h|\int_C\left|\frac{-3(\zeta-z)+2h}{(\zeta-z)^3(\zeta-z-h)^2}\right|d\zeta$$
$$<M|h|\left\{\frac{3}{\delta^4}+\frac{2|h|}{\delta^5}\right\}L.$$

当 $h\to 0$ 时，不等式右端收斂于零，故对于 $n=2$ 的情形証明了(9.8)。

其次应用定理2証明以下定理。

定理3 D 为 Gauss 平面上有界的 n 連通域，它的边界是由 n 个可度长簡单閉曲綫 Γ_1, Γ_2, $\cdots$, Γ_n 构成，$f(z)$ 在 D 及其边界所构成的閉域上单值連續，在 D 内各点正則。命 Γ 表示 $\Gamma_i(i=1, 2,\cdots,n)$ 的倂，且它們的方向为关于域 D 的正方向，則当 $n=0, 1, 2, \cdots$ 时，下式成立：

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta. \tag{9.9}$$

証明 只須合倂定理1与定理2. 但定理3的意义比外表要大，例如显然有

系 在域內任一单值正則函数的导函数，在該域內仍然单值正則。因此高阶导函数也都在同一域內单值正則。

系的前提 $f(z)$ 在域 D 单值正則的条件中，未曾要求 $f'(z)$ 連續。这却是系的結論。因而可以了解系的重要。这个系叫做

Goursat 定理。

3) **Poisson 积分表示** 以下考察域的形状特别簡单的情形。取半徑为 R 的圓，假定复变函数 $f(z)$ 在圓内及边界上单值連續，在圓内正則。不失普遍性可以假定圓心在原点，命 K 表示这一圓周，則 K 可用参数表示如下：

$$\zeta = Re^{i\varphi} \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi), \quad d\zeta = iRe^{i\varphi} d\varphi.$$

取圓内一点 z，且表示为

$$z = re^{i\theta} \quad (0 \leqslant r < R,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi).$$

由定理 1，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}} d\varphi. \quad (9.10)$$

分两种情形討論。$z \neq 0$ 时，假定 z^* 为 z 关于圓 K 的反演点(参看§3 的 1))，則

$$z^* = \frac{R^2}{\bar{z}} = \frac{R^2}{r} e^{i\theta},$$

故 z^* 在 K 的外部。由(9.2)，有

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \frac{re^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - Re^{i\theta}} d\varphi, \quad (9.11)$$

由(9.10)中減去(9.11)得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \left\{ \frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}} - \frac{re^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - Re^{i\theta}} \right\} d\varphi.$$

把括弧{ }内加以計算，得出以下的結果：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi. \quad (9.12)$$

把上式两端分成实部和虛部，命 $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$，$z = re^{i\theta}$，則得出以下的公式：

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi. \quad (9.13)$$

(9.13)通常叫做 **Poisson 积分公式**。至于 $z = 0$ 的情形，則不經

(9.11)，直接由(9.10)即可得出相应的(9.12)及(9.13)。

(9.12) 表明 $f(z)$ 在圆内部的值可用圆周上 $f(z)$ 实虚部的值表示出来，(9.13)则表明 $f(z)$ 实部在圆内的值可用圆周上 $f(z)$ 实部的值表示出来。更进一步，$f(z)$ 在圆内部的值也能够用圆周上 $f(z)$ 实部的值表示出来。这因为(9.13)的积分核可以写成

$$\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}=\frac{R^2-r^2}{(Re^{i\varphi}-re^{i\theta})(Re^{-i\varphi}-re^{-i\theta})}$$
$$=\frac{\zeta\bar{\zeta}-z\bar{z}}{(\zeta-z)(\bar{\zeta}-\bar{z})}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\bar{\zeta}+\bar{z}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\right\}=\Re\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right),$$

从而(9.13)可以写成

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\Re\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)d\varphi$$
$$=\Re\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\varphi.$$

比較 $f(z)$ 与

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\varphi$$

知道，当 $|z|<R$ 时两者的实部相同，且同时为正則。故两者的差为一虚数常数(参看§5的5))。由于 $\zeta=Re^{i\varphi}$，故得出下列公式：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}d\varphi+iC, \qquad (9.14)$$

其中 C 为与 z 无关的常数。(9.14)叫做 **Villat 公式**。

作为公式(9.10)的应用，命 $z=0$，则

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(Re^{i\varphi})d\varphi, \qquad (9.15)$$

从而

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(Re^{i\varphi})d\varphi,\quad v(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(Re^{i\varphi})d\varphi, \qquad (9.16)$$

其中 $u(0)$ 及 $v(0)$ 分别表示 $f(0)$ 的实部及虚部。即作为公式的推論得出下列結果。

系 1 在域 D 的单值正则复变函数 $f(z)$ 的实部、虚部（因此 D 内的調和函数）在全部包含在 D 内的圓的圓心处的值，等于在这一圓周上的平均值。因此当它們不是常数时，在 D 的內部不能**取极大值**及**极小值**。

由公式(9.15)，設 $f(z)$ 在圓周 $|z|=R$ 上滿足 $|f(z)|\leqslant M$，则

$$|f(0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqslant M, \tag{9.17}$$

即

系 2 在域 D 单值正則的复变函数 $f(z)$ 的絕对值 $|f(z)|$ 不等于常数时，則 $|f(z)|$ 在 D 的內部不能取最大值。

因为假定 $|f(z)|$ 在 D 的內点 z_0 等于它的最大值 M，則由(9.17)对于以 z_0 为中心，全部包含在 D 内的任意圓 $|z-z_0|=R_0$ 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+Re^{i\varphi})|\,d\varphi=M;\quad 0\leqslant R\leqslant R_0.$$

因此在这样圓的內部的所有点，从而在 D 內部各点 z 处恒 $|f(z)|=M$，根据域不变原理(参看 §5 的 3)) $f(z)$ 必为常数。

系 2 通常叫做关于正則函数的最大模原理。

4) **边值問題** 一般給定域 D，在它的边界 $F(D)$ 各点 z_0 給定了实函数 $U(z_0)$，求出在 D 内的調和函数 $U(z)$，使 $z_0\in F(D)$ 的所有点下式恒成立：

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in D}}U(z)=U(z_0). \tag{9.18}$$

这一問題叫做 **Dirichlet 問題**。若(9.18)不能在全体点成立，希望求出 $U(z)$ 能在尽量多的点 z_0 处成立。

根据前面已得的結果，考察 D 为 Gauss 平面上的某一圓，在圓周上給的**边值**(boundary values)在 $F(D)$ 上为連續的情形。不失普遍性可設圓心在原点，假定圓的半徑为 R，它的边值可用 φ 的連續函数 $u(R,\varphi)$ 表示。把这个边值代入 Villat 公式(9.14)的

右端,即可得出下列复变函数:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\ \varphi)\ \frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\,d\varphi+iC. \tag{9.19}$$

这是 z 的正則函数,因为完全和定理 2 的証明一样,可以証明它的导数为

$$F'(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\ \varphi)\ \frac{Re^{i\varphi}}{(Re^{i\varphi}-z)^2}\,d\varphi. \tag{9.20}$$

故分离 $F(z)$ 的实部后得出 Poisson 积分

$$U(r,\ \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\ \varphi)\ \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\varphi,$$

它在 D 内是調和函数。欲証它是 Dirichlet 問題的解,只須証明对于所有的 $\varphi=\varphi_0\,(0\leqslant\varphi_0\leqslant2\pi)$

$$\lim_{\substack{r\to R\\ \theta\to\varphi_0}}U(r,\ \theta)=u(R,\ \varphi_0).$$

这一事实的証明即本小节的目的。

但是,从稍微一般的立場說来,使(9.19)右端有意义且其导函数为(9.20)的証明,并不一定須要 $u(R,\ \varphi)$ 为 φ 的連續函数,只設作为 φ 的函数 Lebesgue 意义可积就够了。因此我們的目的如果能証明了以下的定理就可达到。

定理 4 設在圓周 $z=Re^{i\varphi}\ (0\leqslant\varphi\leqslant2\pi)$ 上定义的实函数 $u(R,\varphi)$ 作为 φ 的函数是 Lebesgue 意义可积的$\left(\text{即}\int_0^{2\pi}|u(R,\varphi)|\,d\varphi<+\infty\right)$. 今用这一函数作 Poisson 积分

$$U(r,\ \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\ \varphi)\ \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\varphi, \tag{9.21}$$

則它在圓内 $0\leqslant r<R$ 調和,且 $u(R,\ \varphi)$ 在值 $\varphi=\varphi_0$ 处为 φ 的連續函数时,有

$$\lim_{\substack{r\to R\\ \theta\to\varphi_0}}U(r,\ \theta)=u(R,\ \varphi_0). \tag{9.22}$$

証明 $U(r, \theta)$ 在圓内部为調和函数的事实已經在上面說明过了。这里只須証明 $u(R, \varphi)$ 在 φ_0 处为 φ 的連續函数时 (9.22) 成立。

首先由假設,任意給定正数 ε, 有正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$, 使得

$$\text{当 } |\varphi-\varphi_0|<\delta \text{ 时有 } |u(R,\varphi)-u(R,\varphi_0)|<\varepsilon/2. \tag{9.23}$$

另一方面, $u(R, \varphi)$ 作为 φ 的函数是 Lebesgue 意义可积的,故命

$$\int_0^{2\pi} |u(R, \varphi)|d\varphi=M, \tag{9.24}$$

则 M 为有穷数值。当 $M=0$ 时 $U(r, \theta)\equiv 0$, 这样定理显然成立, 故只須考慮 $M>0$ 的情形就够了。我們的目的是滿足

$$\left.\begin{array}{l} 0<R-r<\rho, \\ |\theta-\varphi_0|<\rho' \end{array}\right\} \tag{9.25}$$

的所有 (r, θ), 使

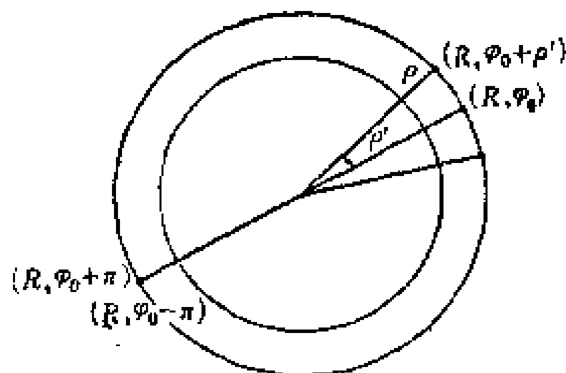


图 9.2

$$|U(r, \theta)-u(R, \varphi_0)|<\varepsilon \tag{9.26}$$

成立的 ρ, ρ' 能够用 M 及 $\delta=\delta(\varepsilon)$ 表示出来。

为此,先命 $\rho'=\delta/2$. ρ 則用下述方法求出。因为对于常数 1, 公式 (9.13) 或 (9.14) 显然成立

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\varphi,$$

故

$$u(R, \varphi_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R, \varphi_0)\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\varphi,$$

从而

$$U(r, \theta)-u(R,\varphi_0)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{u(R, \varphi)-u(R, \varphi_0)\}\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\varphi,$$

即

$$|U(r,\theta)-u(R,\varphi_0)|$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(R,\varphi)-u(R,\varphi_0)|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\varphi_0-\delta}^{\varphi_0+\delta}+\int_{\varphi_0-\pi}^{\varphi_0-\delta}+\int_{\varphi_0+\delta}^{\varphi_0+\pi}\right).$$

这里不失普遍性,将 $u(R,\varphi)$ 认作以 2π 为周期的周期函数

$$u(R,\varphi)=u(R,\varphi\pm 2\pi).$$

为了估計第一积分,由于

$$0<R^2-r^2,\quad R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2=|Re^{i\varphi}-re^{i\theta}|^2\geqslant 0,$$

由(9.13),有

$$0\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_0-\delta}^{\varphi_0+\delta}<\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_0-\delta}^{\varphi_0+\delta}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi=\frac{\varepsilon}{2}.$$

其次,估計第二及第三积分。由于

$$R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2=(R-r)^2+2Rr\{1-\cos(\varphi-\theta)\}$$

$$>2Rr\{1-\cos(\varphi-\theta)\}=4Rr\sin^2\frac{\varphi-\theta}{2}.$$

但由(9.25),$|\theta-\varphi_0|<\rho'=\dfrac{\delta}{2}$,另一方面,由于 $\varphi_0-\pi\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0-\delta$ 或 $\varphi_0+\delta\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0+\pi$,不論那一种情形都有 $|\varphi-\varphi_0|\geqslant\delta$。故

$$|\varphi-\theta|\geqslant|\varphi-\varphi_0|-|\varphi_0-\theta|\geqslant\delta-\frac{\delta}{2}=\frac{\delta}{2}.$$

更因 $|\varphi-\theta|\leqslant\pi$,故 $|\varphi-\theta|/2\leqslant\dfrac{\pi}{2}$。因此有

$$\sin^2\frac{\varphi-\theta}{2}\geqslant\sin^2(\delta/4),$$

故

$$R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2>4Rr\sin^2(\delta/4).$$

但另一方面，由于 $R^2-r^2=(R+r)(R-r)<2R(R-r)$，命

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(R,\ \varphi)-u(R,\ \varphi_0)|\,d\varphi,$$

则

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\varphi_0-\pi}^{\varphi_0-\delta}+\int_{\varphi_0+\delta}^{\varphi_0+\pi}\right)$$

$$\leqslant\frac{R-r}{2r\sin^2(\delta/4)}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\varphi_0-\pi}^{\varphi_0-\delta}+\int_{\varphi_0+\delta}^{\varphi_0+\pi}\right)|u(R,\varphi)-u(R,\varphi_0)|\,d\varphi$$

$$\leqslant\frac{R-r}{2r\sin^2(\delta/4)}A.$$

因此命

$$0<R-r<\rho=\frac{R\varepsilon}{A+\varepsilon}\sin^2\frac{\delta}{4},\tag{9.27}$$

则第二及第三积分的和小于 $\varepsilon/2$，故(9.26)成立。这里 A 满足

$$A\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(R,\ \varphi)|\,d\varphi+|u(R,\ \varphi_0)|=\frac{M}{2\pi}+|u(R,\ \varphi_0)|,\tag{9.28}$$

故可用(9.28)右端的值代替 A。

第 4 章　单值函数的正則性及孤立奇点

今利用 Cauchy 积分定理研究单值复变函数的正則性及奇点的状态。

§ 10　正則函数的幂級数展开

1) Taylor 級数　今应用 Cauchy 积分表示研究正則函数及幂級数的关系。

命 $f(z)$ 在 Gauss 平面的域 D 单值正則，a 为 D 内的任意点。以 a 为中心、充分小的 r 为半徑作圓 C，使 C 的內部及其圓周全部包含在 D 內，命圓內任一点为 z，圓周上的点为 ζ，則由 Cauchy 积分表示公式有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{10.1}$$

此处由于 $|z-a|<|\zeta-a|=r$，故可得出以下的无穷等比級数：

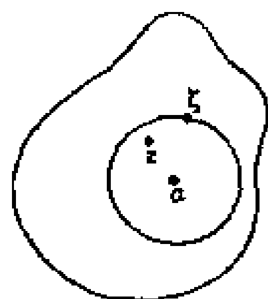


图　10.1

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\;\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}$$

$$=\frac{1}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}.$$

这个級数的公比是

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|=\frac{|z-a|}{r}<1.$$

由于常数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z-a|^n}{r^{n+1}}$ 收斂，故上面的級数为一致收斂（参看 § 4 的 3)）。所以用有界連續函数 $f(\zeta)$ 乘級数的各項所得的級数

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n \tag{10.2}$$

当 $\zeta\in C$ 时仍然一致收斂，因此可以逐項积分(参看 §7 的(6°))。就(10.2)的两端积分，則由(9.1)有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta, \tag{10.3}$$

更由(9.9)有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

故(10.3)可以写成

$$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n\\&=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots.\end{aligned} \tag{10.4}$$

以 a 为心作出包含在 D 內的最大的圓，在这样的圓內的任一点 z 公式(10.4)都成立。即当 a 与 D 的边界的距离为 ρ 时，对于滿足 $|z-a|<\rho$ 的 z (10.4)成立，故右端幂級数的收斂半徑不能小于 ρ，因此得到下列定理。

定理 1 在 Gauss 平面域 D 的单值正則函数，在 D 內的任一点 a，可以展成以 a 为中心的幂級数。这个幂級数与在中心 a 的 Taylor 級数一致，它的收斂半徑不小于由 a 到 D 的边界的距离。

2) **Weierstrass 二重級数定理** (Doppelreihen Satz) 作为 Cauchy 积分表示公式的另一应用，証明 Weierstrass 于 1881 年提出的**二重級数定理**。

定理 2 命 D 为 Gauss 平面上的有界 n 連通域，它的边界 Γ 系由 n 个彼此分离的可度长簡单閉曲綫 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n$ 构成，并且关于 D 它們都具有正的方向。設函数列 $f_n(z)$ $(n=1, 2, \cdots)$在閉域 $D\cup\Gamma$ 单值連續，在 D 內正則，并且在边界 Γ 上一致收斂。于是 $f_n(z)$在 D 的內部也一致收斂。其极限函数

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}f_n(z) \tag{10.5}$$

在 D 内单值正則。另外当 $p=1, 2, \cdots$ 时，对于 $f(z)$ 的各級导数 $f^{(p)}(z)$ 下式成立：

$$f^{(p)}(z)=\lim_{n\to\infty}f_n^{(p)}(z). \tag{10.6}$$

証明　取 D 内的任意点 z，由 Cauchy 积分表示公式，对于任意的足碼 $n(n=1, 2, \cdots)$ 下式成立：

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

右端积分中的被积函数

$$\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}$$

作为 ζ 的函数，根据假設在 Γ 上一致收斂。故命 $F(\zeta)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\zeta)$，$\zeta\in\Gamma$，由 §7 (6°) 知道 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(z)$ 存在且

$$\lim_{n\to\infty}f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,dz. \tag{10.7}$$

在上式中命 $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(z)$，则 $f(z)$ 表示正則函数。另一方面，由于 $f_n(\zeta)$ 在 Γ 上一致收斂，故任給正数 ε 有正整数 N 存在，对于滿足 $m, n>N$ 的任意两个足碼有

$$|f_m(\zeta)-f_n(\zeta)|<\varepsilon.$$

因为 $f_m(z)-f_n(z)$ 是 D 内正則函数，在閉域 $D\cup\Gamma$ 上連續，故由正則函数的最大模原理知道，$|f_m(z)-f_n(z)|$ 的最大値在边界上。故 $z\in D$ 也应有

$$|f_m(z)-f_n(z)|<\varepsilon,$$

由此可知，$f_n(z)$ 不只在边界一致收斂，在 $D\cup\Gamma$ 也一致收斂。这样就証明了定理的前半部，由此知 $f(z)$ 在 $D\cup\Gamma$ 連續，边界値就是 $F(\zeta)$。

但由 (9.9)

$$f^{(p)}(z)=\frac{p!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}d\zeta,\quad f_n^{(p)}(z)=\frac{p!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_n(z)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$$

成立，故把 z 固定，对于 ζ 引用 §7 中的 $(6°)$，可以直接得出 (10.6)。

冪級数不只在其收斂圓內收斂，在以同一中心，半徑稍小的圓內亦一致收斂，故由 Weierstrass 二重級数定理断定，冪級数在它的收斂圓內各点都是正則的。

3) **Cauchy 系数定理，Gutzmer 定理** 若冪級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在圓 $|z|<\rho$ 内为正則函数，在圓周 $|z|=R$（其中 $0<R<\rho$）上 $|f(z)|\leqslant M(R)$，則由 (9.9) 及定理 1，有

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{K(R)}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta,$$

其中 $K(R)$ 表示圓 $|z|=R$。故用 $\zeta=Re^{i\theta}$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 表示积分路綫时，有

$$|c_n|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(Re^{i\theta})|}{R^{n+1}}Rd\theta=\frac{1}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi}|f(Re^{i\theta})|d\theta,$$

故

$$|c_n|\leqslant\frac{M(R)}{R^n}.$$

令 $R\to\rho$，則 $|c_n|\leqslant M/\rho^n$，$M=\max_{|z|<\rho}|f(z)|$。故得出下列定理 3，它叫做 **Cauchy 系数定理**。

定理 3 假定 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在 $|z|<\rho$ 收斂，且 $|f(z)|\leqslant M$，則对于 $n=0, 1, 2, \cdots$，有

$$|c_n|\leqslant M/\rho^n. \tag{10.8}$$

决定 $|c_n|<M/\rho^n$ 及 $|c_n|=M/\rho^n$ 中那一个成立，可以利用下列 **Gutzmer 定理**。

定理 4 与定理 3 相同的条件下，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\rho^{2n}\leqslant M^2. \tag{10.9}$$

証明 两个級数所表示的函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n, \qquad \overline{f(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{c_n}\,\overline{z^n}$$

的右端，在满足 $|z|=R,\ 0<R<\rho$ 的圆周上絕对且一致收斂。故命 $z=Re^{i\theta}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 沿这个圆周就 θ 积分 $|f(z)|^2$，則

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(Re^{i\theta})|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n R^n e^{in\theta}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\overline{c_m}R^m e^{-im\theta}\right)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}c_n\overline{c_m}R^{m+n}e^{i(n-m)\theta}\right)d\theta,\end{aligned}$$

因为这个二重級数絕对收斂，可以任意重排为单重級数，并且

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|c_n||c_m|R^{n+m}=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|R^n\sum_{m=0}^{\infty}|c_m|R^m$$

收斂，所以单重級数关于 θ 一致收斂，故可逐項积分。更因

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}c_n\overline{c_m}R^{n+m}e^{i(n-m)\theta}d\theta=\begin{cases}0, & \text{当 } m\neq n \text{ 时},\\ |c_n|^2R^{2n}, & \text{当 } m=n \text{ 时},\end{cases}$$

故

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(Re^{i\theta})|^2 d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2R^{2n}.$$

另一方面，在左端的积分中代入 $|f(Re^{i\theta})|\leqslant M$，即得出

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2R^{2n}\leqslant M^2.$$

故对于任意的部分和仍然 $\sum_{n=0}^{K}|c_n|^2R^{2n}\leqslant M^2$. 命 $R\to\rho$，則 $\sum_{n=0}^{K}|c_n|^2\rho^{2n}\leqslant M^2$. 注意 K 是任意的自然数，命 $K\to\infty$，則

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\rho^{2n}\leqslant M^2.$$

这就是(10.9)。

Gutzmer 定理包含 Cauchy 系数定理。因为只取一項时，則 $|c_n|^2\rho^{2n}\leqslant M^2$ 或 $|c_n|\rho^n\leqslant M$. 这时候，若某一个 n 的值使等号成立，則其他的 $c_{n'}(n\neq n')$ 必定都是零。从而(因 $|c_n|\rho^n=M$)有

$$f(z)\equiv c_n z^n=\varepsilon\frac{M}{\rho^n}z^n, \quad |\varepsilon|=1. \tag{10.10}$$

4) **Liouville 定理** 在 Gauss 平面上的各点正則的函数叫做**整函数**(entire function)。应用上述 Cauchy 系数定理,可以簡单地証明 Liouville 关于整函数的定理。事实上,由定理 1 整函数 $f(z)$ 能够展成以 $z=0$ 为中心的冪級数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad |z|<+\infty. \tag{10.11}$$

若 $f(z)$ 有界,即 $|f(z)|\leqslant M<+\infty\,(|z|<+\infty)$,在以任意正数 ρ 为半徑的圓 $|z|\leqslant\rho$ 内,应用 Cauchy 系数定理,有

$$|c_n|\leqslant\frac{M}{\rho^n} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

假定 $n\neq 0$ 而命 $\rho\to+\infty$,则必 $c_n=0$. 即假定 $|f(z)|\leqslant M<+\infty$ $(|z|<+\infty)$,则 $f(z)\equiv c_0$. 故

定理 5 若整函数有界,则这一整函数必为一常数。

这就是 Liouville 定理。对于 $f(z)$ 在圓周 $|z|=r\,(0\leqslant r<+\infty)$ 上命 $|f(z)|$ 的最大值为 $M(r)$,以后将可看到,这个值起着重大的作用,不过在这里,已經可以得到相当重要的結果。事实上,由于正則函数的最大模原理,$M(r)$ 是 r 的增函数,由 Liouville 定理知道,当 $f(z)$ 不是常数时,必定 $\lim\limits_{r\to+\infty} M(r)=+\infty$. 故对于 $r\to+\infty$, $M(r)$ 以怎样的程度发散于 ∞ 是极其重要的条件,例如

$$\frac{\log M(r)}{\log r}\leqslant A<+\infty$$

为有界时,实际 $M(r)\leqslant r^A$,对于满足 $A<n$ 的一切自然数 n,由 (10.8) 有

$$|c_n|\leqslant M(r)/r^n\leqslant r^{A-n},$$

命 $r\to+\infty$,则 $c_n=0$. 故 $f(z)$ 必为有理整多項式,其次数最高不过 $[A]$, $[A]$ 表示不超过 A 的最大整数。

5) **关于 Poisson 积分的 Fourier 級数展开** 我們已經討論过 $z=Re^{i\varphi}\,(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$,即在半徑为 $R\,(0<R<+\infty)$ 的圓周上

給定了 Lebesgue 可积函数 $u(R, \varphi)$ 时，由此所作的 Poisson 积分在圓的内部等于正則函数的实部，从而在該圓的内部是調和函数(参看 § 9 的 3))。这个正則函数，由本节的定理 1，能够展成收斂半徑不小于 R 的冪級数。事实上，由(9.19)有

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R, \varphi)\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\,d\varphi+iC\quad (C\text{ 为实数}),$$

命 $z=re^{i\theta}$，則

$$\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}=\frac{2Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}-re^{i\theta}}-1=\frac{2}{1-\left(\frac{r}{R}\right)e^{i(\theta-\varphi)}}-1$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in(\theta-\varphi)}-1=1+2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in(\theta-\varphi)}\quad (0\leqslant r<R).$$

当 $0\leqslant r<R$ 时，这个級数对于 φ 一致收斂，故可代入上式逐項积分，于是

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R, \varphi)d\varphi$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(\frac{r}{R}\right)^n\int_0^{2\pi}u(R, \varphi)e^{in(\theta-\varphi)}d\varphi+iC.$$

这里取实数部分，則应得出 Poisson 积分，即

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R, \varphi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R, \varphi)d\varphi$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{r}{R}\right)^n\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(R, \varphi)\cos n(\theta-\varphi)d\varphi\right\}.$$

由于 $\cos n(\theta-\varphi)=\cos n\theta\cos n\varphi+\sin n\theta\sin n\varphi$，只与 θ 有关的因子可以提到积分号外，故

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R, \varphi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\varphi$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),\qquad (10.12)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}u(R,\ \varphi)\cos n\varphi\,d\varphi\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}u(R,\ \varphi)\sin n\varphi\,d\varphi\quad(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

公式(10.12)当$u(R,\ \varphi)$在 $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$为 Lebesgue 可积，则$0\leqslant r<R$，$-\infty<\theta<+\infty$ 时永远是正确的。

§11 可去奇点，极点

若复变函数$f(z)$在 Gauss 平面或复数球面上的域 D 内除去一点 z_0 外，在其余的 $D-(z_0)$ 的各点单值正则，则 z_0 叫做 $f(z)$的**孤立奇点**(isolated singular point)。一般奇点的定义将在下章叙述(参看 §14)。在奇点的研究中，孤立奇点研究得最早并且最详细。孤立奇点依照它不同的性质共分为三种：(1)可去奇点，(2)极点，(3)本性奇点。本节将叙述其中的(1)，(2)两种，至于(3)的研究则主要地放在第 7 章。

1) **可去孤立奇点** 命 z_0 为 Gauss 平面域 D 的一点，它是$f(z)$的孤立奇点，且假定$f(z)$在 z_0 的邻域有界。由这一假定，则以 z_0 为中心、ρ 为半徑($\rho>0$)的圆，及正数 M 存在，于是满足 $0<|z-z_0|<\rho$ 的各 z 使

$$|f(z)|\leqslant M<+\infty$$

成立。今用$K(\rho)$表示上述的圆，再作以充分小的数 r 为半徑的圆，即$|z-z_0|<r$，用$K(r)$表示这个圆。今考察包含在$K(\rho)$内但不包含在$K(r)$内及边界上的部分，这是用$K(\rho)$，$K(r)$作边界的双連通域 $D(r)$。对于$z\in D(r)$的 z 应用 Cauchy 积分公式，使积分路綫的方向为圆心角增大的方向，则

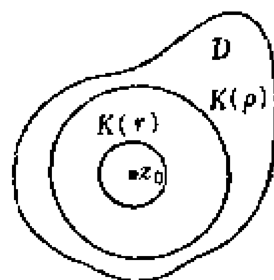


图 11.1

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{K(\rho)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{K(r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

第二积分的积分路綫可用 $\zeta=z_0+re^{i\theta}$，因此 $d\zeta=ire^{i\theta}d\theta$。且当 $\zeta\in K(r)$ 时，$|f(\zeta)|\leqslant M$，更由于 $|\zeta-z|\geqslant|z-z_0|-|z_0-\zeta|=|z-z_0|-r$，故

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{K(r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{|z-z_0|-r}\,r\cdot 2\pi=\frac{Mr}{|z-z_0|-r}.$$

这一值当 $r\to0$ 时收斂于零。上式中的第一积分是一个与 r 无关的量，因此可知第二积分也应当是与 r 无关的量，因此第二积分应等于零，即下式成立：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{K(\rho)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{11.1}$$

(11.1)对于满足 $0<|z-z_0|<\rho$ 的 z 都成立，而由这一式的右端可知，在 z_0 不只是連續，且为正則，即証明了下列定理。

定理 1 若单值函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 的邻域除去 z_0 外在其他各点正則且有界，则有满足

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A \tag{11.2}$$

的有穷极限值 A 存在，命 $f(z_0)=A$，则 $f(z)$ 事实上在 $z=z_0$ 是正則的。

因此在这种意义下，这时 $z=z_0$ 叫做 $f(z)$ 的**可去奇点**。z_0 在复数球面上 $z_0=\infty$ 时，命 $z'=1/z$，然后对于单值函数 $F(z')=F(1/z')$ 在 $z_0'=0$ 应用定理 1，即对于在 $\rho<|z|<+\infty$ 有界的单值正則函数 $f(z)$，极限

$$\lim_{z\to\infty}f(z)$$

一定存在。但是在 $z=\infty$ 正則性的情况，则由以下的 Laurent 展开来研究最为簡单。

2) 展成 Laurent 級数 今假定在 Gauss 平面上有两个可

度长简单闭曲綫 Γ_1, Γ_2，它們不相交，其中一个如 Γ_2 完全包含在另一个 Γ_1 的内部。若函数 $f(z)$ 在 Γ_1, Γ_2 包圍的域 D 内正則，在閉域 $D \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 上单值連續，則由 Cauchy 积分公式，当 $z \in D$ 时有

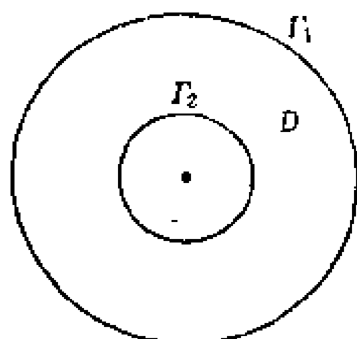


图 11.2

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad (11.3)$$

其中 Γ_1 及 Γ_2 对于它們所包圍的域内部来說都是正向（Γ_1 对于 D 是正向，Γ_2 对于 D 則为負向）。命

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \varphi_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

則 $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ 不只在 D 内，$\varphi_1(z)$ 在 Γ_1 整个内部正則，而 $\varphi_2(z)$ 則在 Γ_2 整个外部正則，对于后者还有有穷的 $\lim\limits_{z\to\infty} \varphi_2(z)$。利用这一事实，Laurent 于 1843 年就 Γ_1, Γ_2 为同心圓的特殊情形考察，把幂級数推广成为所謂 Laurent 級数。即命同心圓的中心为 a，半徑各为 $0 < \rho_2 < \rho_1 < +\infty$，則 D 可以表示为 $\rho_2 < |z-a| < \rho_1$。首先因为

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (11.4)$$

在圓 Γ_1 内部 D_1 正則，故在 Γ_1 内可以展成以 a 为中心的收斂幂級数，即

$$\varphi_1(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots, \quad |z-a| < \rho_1, \qquad (11.5)$$

其中系数 a_n 可用下式表示：

$$a_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n \varphi_1(z)}{dz^n}\right)_{z=a} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta.$$

其次，对于

$$\varphi_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad (11.6)$$

它的积分路綫 Γ_2 可用 $|\zeta-a|=\rho_2$ 表示，当 z 在 Γ_2 的外部 D_2 时，有

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=-\frac{1}{z-a}\left\{1+\frac{\zeta-a}{z-a}+\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^2+\cdots\right\}.$$

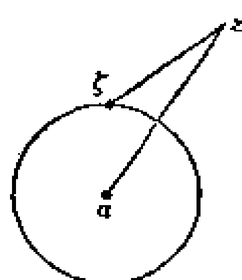


图　11.3

由于 $z\in D_2$，$|\zeta-a|=\rho_2<|z-a|$，故其公比

$$\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|=\frac{\rho_2}{|z-a|}<1$$

不只小于1且与 ζ 无关。上面的等比級数对 ζ 説一致收斂，因之代入(11.6)后可以逐項积分。积分后得

$$\varphi_2(z)=\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots,\qquad(11.7)$$

其中

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}f(\zeta)\,(\zeta-a)^{n-1}d\zeta.$$

故在圆环域 $\rho_2<|z|<\rho_1$ 內，級数(11.5)及(11.7)同时絕对收斂，且对于任意两个滿足 $\rho_2<\rho_2^*\leqslant|z|\leqslant\rho_1^*<\rho_1$ 的 ρ_1^*，ρ_2^*，在这一閉圓环域內二者都一致收斂。給出系数 a_n 与 a_{-n} 的积分式

$$\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta,\quad \int_{\Gamma_2}f(\zeta)\,(\zeta-a)^{n-1}d\zeta$$

的积分路綫 Γ_1,Γ_2，可代之以圓环域：$\rho_2\leqslant|z|\leqslant\rho_1$ 內含 $|z-a|=\rho_2$ 于內部的任一条簡单閉曲綫而不影响积分的值，自然二者也可以选用同一积分路綫，这样就更为簡单。

定理2　函数 $f(z)$ 在Gauss平面上以点 a 为中心的同心圓 Γ_1，Γ_2（命 Γ_1 在 Γ_2 的外边）所构成的圓环內正則，在閉圓环域单值連續，則对于这个域內的任意 z，有下列展开式：

$$\begin{aligned}f(z)&=\cdots+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{a_{-1}}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots\\&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n,\end{aligned}\qquad(11.8)$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta \quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots),\quad (11.9)$$

其中 K 为满足 $\rho_2\leqslant\rho\leqslant\rho_1$ 的任意 ρ 为半徑的圓周 $|z-a|=\rho$,积分路綫的方向为沿对于 a 所張的角增大的方向旋轉。級数(11.8)在 $\rho_2<|z-a|<\rho_1$ 絕对收斂,且在圓环域內的任一閉域一致收斂。

定理 2 叫做 **Laurent 定理**，而級数(11.8)則叫做 $f(z)$ 在这一圓环的 **Laurent 級数**。

在 Laurent 級数中,若 $f(z)$ 在 Γ_1 內部的各点均正則,則上述系数計算式(11.9)中，对于 $n=-1,\ -2,\ -3,\cdots$，被积函数在 K 的內部全都单值正則,故

$$a_{-1}=a_{-2}=\cdots=0,$$

級数的負幂項全部消失，因此 Laurent 級数归結成幂級数。在这种意义下，Laurent 級数推广了幂級数。

3) **极点**(pole)　今利用 2) 中引进的 Laurent 級数研究孤立奇点。为此首先給出极点的定义。命 $z=a$ 为 Gauss 平面上的一点,且 a 为单值函数 $f(z)$ 的孤立奇点。若极限值

$$\lim_{z\to a} f(z)$$

存在且有穷，則 a 为 $f(z)$ 的可去奇点。若在該处极限值存在但为 ∞ 时 (換句話說就是 $\lim\limits_{z\to a}|f(z)|=\infty$)，則叫做 a 是 $f(z)$ 的**极点**。相反的,这一极限值不存在的情形(換句話說,复数球面上至少有两个数值 $\alpha,\ \beta\ (\alpha\neq\beta)$,又有滿足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a,\ \lim\limits_{n\to\infty} a'_n=a$ 的点列 $\{a_n\}$, $\{a'_n\}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$,使

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\alpha,\qquad \lim_{n\to\infty} f(a'_n)=\beta$$

成立的情形)，則 a 叫做 $f(z)$ 的**孤立本性奇点** (isolated essential singular point)。这样虽然把孤立奇点分成三种，但其中最初的可去奇点虽也叫做奇点，事实上，只要将 $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 认作是 $f(a)$ 的話,則 $f(z)$ 在該点正則,因此毋宁看作是正則点还更方便。由相同

的观点，将极点看作是$f(z)$取值∞(复数球面上)的正则点也沒有什么不可以，因此，眞正的奇点只是第三种了。这一事实将于以后詳加說明。

为此先討論$z=a$为函数$f(z)$的极点的特性。

定理3　$z=a$为函数$f(z)$的极点的充要条件是在$z=a$的某一邻域内，命

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{f(z)} & (z\neq a),\\ 0 & (z=a)\end{cases}$$

时，$g(z)$在$z=a$的邻域内正則，而$z=a$是$g(z)$的零点。

(一般所謂正則函数的零点，是这一函数在該点正則，且在这一点的值为零。)

証明　先假定a是$f(z)$的极点。由于$\lim\limits_{z\to a}|f(z)|=+\infty$，故$f(z)$在$a$的某一邻域内不能取零的值。因此，$g(z)$在某一数値$\rho$为半徑的$0<|z-a|<\rho$内正則。仍由上面的假定，对于任意的正数$M$，有正数$\rho$，当$0<|z-a|<\rho$时$|f(z)|\geqslant M$，故在該处$g(z)$有界$\left(|g(z)|\leqslant\dfrac{1}{M}\right)$，所以$z=a$是$g(z)$的可去奇点。即命$g(a)=0$时，則$g(z)$在$0\leqslant|z-a|<\rho$正則且$g(a)=0$。即$z=a$是$g(z)$的零点。

反之，假定这样定义的$g(z)$具有零点$z=a$，把$g(z)$展成$z-a$的幂級数

$$g(z)=c_p(z-a)^p+c_{p+1}(z-a)^{p+1}+\cdots\quad(c_p\neq 0),$$

这个幂級数在$z=a$的邻域收斂，且$c_0=0$。由于

$$g(z)=c_p(z-a)^p\left\{1+\frac{c_{p+1}}{c_p}(z-a)+\cdots\right\},$$

故在$z=a$的邻域，当$z\neq a$时$g(z)$不等于零。故$f(z)=1/g(z)$在$z=a$的邻域当$z\neq a$时正則。由于$\lim\limits_{z\to a}g(z)=0$，故$\lim\limits_{z\to \infty}f(z)=\infty$。

因此証明了定理 3.

其次，命 $z=a$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，然后应用 Laurent 定理。即以 a 为中心作两个同心圓 $K(\rho)$，$K(r)$ $(0<r<\rho)$，設 $f(z)$ 除 $z=a$ 外，在 $K(\rho)$ 的周界及其内部为单值正則，这样在圓环域 $r\leqslant|z-a|\leqslant\rho$ 作出 $f(z)$ 的 Laurent 級数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n.$$

在这个展开式中，系数 c_n 与 r 及 ρ 无关，只由 $f(z)$ 在 $z=a$ 的邻域的値确定。因此这級数叫做在 $z=a$ 展开的 Laurent 級数。对于这一展开下列定理成立。

定理 4 $z=a$ 为单值函数 $f(z)$ 的极点的充要条件是它的 Laurent 級数展开負数幂的項存在，但最多有穷个

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\frac{c_{-1}}{(z-a)}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}$$
$$+\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}\quad(c_{-m}\neq0).\tag{11.10}$$

証明 若 $z=a$ 为 $f(z)$ 的极点，則与定理 3 的証明一样，作函数 $g(z)=1/f(z)$，$g(z)$ 在 a 的邻域有以下的展开：

$$g(z)=c_p(z-a)^p\left\{1+\frac{c_{p+1}}{c_p}(z-a)+\frac{c_{p+2}}{c_p}(z-a)^2+\cdots\right\},$$

其中 $c_p\neq0$. 命

$$g_1(z)=1+\frac{c_{p+1}}{c_p}(z-a)+\frac{c_{p+2}}{c_p}(z-a)^2+\cdots\quad(c_p\neq0),$$

則这个幂級数在 $z=a$ 的某一邻域收斂，且在該处連續，而 $\lim\limits_{z\to a}g_1(z)=1$. 因此以下的展开式也成立：

$$f_1(z)=\frac{1}{g_1(z)}=1+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\cdots.$$

右端的幂級数在 $z=a$ 的某一邻域 $V(a)$ 收斂。故在 $V(a)$ 内下列展开式成立：

$$f(z)=\frac{1}{c_p(z-a)^p}+\frac{b_1}{c_p(z-a)^{p-1}}+\cdots+\frac{b_p}{c_p}+\cdots. \quad (11.11)$$

Laurent 級数展开的系数已經如定理 2 的 (11.9) 所給出，即由邻域 $V(a)$ 内的圓周 K 上 $f(z)$ 的值确定，故 (11.11) 的展开式必定与 Laurent 級数展开一致，即沒有再小于 $-p$ 次幂的項。

反之，当 $f(z)$ 可以写成(11.10)的形状时，则

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}\left\{1+\frac{c_{-m+1}}{c_{-m}}(z-a)+\cdots\right\} \quad (c_{-m}\neq 0).$$

括弧{ }内的幂級数在 $z=a$ 的某一邻域收斂，因此显然

$$\lim_{z\to a}f(z)=\infty.$$

定理 4 中的

$$\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m} \quad (c_{-m}\neq 0) \qquad (11.12)$$

叫做极点的**主部**(principal part)。$z=a$ 为 $f(z)$的极点时，自 $f(z)$ 把这一部分减去后，剩下的部分是正则的，它是决定极点状态的主要部分，所以有这个名称。

定理 5　Gauss 平面上一点 a 为 $f(z)$的孤立奇点，并且是 $f(z)$ 的极点的充要条件是存在某一个自然数 m，使

$$\lim_{z\to a}\{(z-a)^m f(z)\}$$

是有穷且是确定的数值。

証明　对于定理 4 所得出的自然数 p，取滿足 $p\leqslant m$ 的任意自然数 m，这就是定理的必要条件。至于充分条件，可先把 $g(z)=(z-a)^m f(z)$在 a 的邻域展成$(z-a)$的幂級数，然后用 $(z-a)^m$ 去除。由此即可得出 $f(z)$ 在 $z=a$ 的邻域的 Laurent 級数。这里可以应用定理 4.

这样的 m 存在的情形，则由以上的考察容易看出，对于 m, $m-1$, $\cdots$, 2, 1 中的某一自然数 p，能够使 $\lim\limits_{z\to a}\{(z-a)^p f(z)\}$为有穷确定且 $\neq 0$. 这个 p 叫做极点的級(order)。

以上叙述了极点的一些简单的特性。极点的概念不只是对于 Gauss 平面上的点 a，对复数球面上的点 $z=\infty$ 的情形也可适用。这时以 $z=0$ 为中心、充分大的正数 ρ 为半徑作圓 $|z|=\rho$，$f(z)$ 在滿足 $\rho\leqslant|z|<+\infty$ 的 z 处为单值正则。故以滿足 $\rho<r<+\infty$ 的任意正数 r 为半徑作圓 $|z|=r$，則在圓环閉域 $\rho\leqslant|z|\leqslant r$ 內作 $f(z)$ 的 Laurent 級数，这个級数与 ρ 及 r 无关，只由 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的邻域的值确定。这个級数叫做 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的邻域展开的 Laurent 級数。

这一 Laurent 級数具有以下的形状：

$$f(z)=\cdots+\frac{c_{-2}}{z^2}+\frac{c_{-1}}{z}+c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots. \qquad (11.13)$$

这时确定的极限值

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty$$

存在的充要条件为有自然数 p 存在，使 $c_p\neq 0$，$c_{p+1}=c_{p+2}=\cdots=0$. 故(11.13)写成

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_{-m}}{z^m}+c_1z+\cdots+c_pz^p \quad (c_p\neq 0) \qquad (11.14)$$

的形状时，$z=\infty$ 叫做 $f(z)$ 的极点，而

$$c_1z+c_2z^2+\cdots+c_pz^p \quad (c_p\neq 0)$$

叫做它的主部。因此相当于定理 5 的定理为“$z=\infty$ 为 $f(z)$ 的极点的充要条件是有自然数 m 存在，使

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^m} \qquad (11.15)$$

为有穷确定”。这时上述的 p 也叫做极点的級。上述的展开式 (11.13) 中当 $c_1=c_2=\cdots=0$ 时叫做 $f(z)$ 在 $z=\infty$ **正則**，而 c_0 則为 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的值。

整函数 $f(z)$（参看 §10 的 4)）能够展成以 $z=0$ 为中心的幂級数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{11.16}$$

它的收斂半徑为 $+\infty$。由于(11.16)的收斂半徑是 $+\infty$，故(11.16)也是在 $z=\infty$ 处展开的 Laurent 級数。如果 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 正则，则由于 $c_1=c_2=\cdots=0$，故 $f(z)\equiv c_0$，因此 $f(z)$ 是一常数。故不是常数的整函数必以 $z=\infty$ 为极点或孤立本性奇点。

4) **殘数，幅角原理，Rouché 定理**　命 $z=a$ 为 Gauss 平面或复数球面上的一点，$f(z)$ 以 $z=a$ 为孤立奇点。以 a 为中心、充分小的数为半徑在复数球面作圓周 K，这时 K 包含的域在复数球面上构成含 a 的球帽（参看 §4, 3)），只要半徑足够小，可以使球帽含于除 a 外 $f(z)$ 正則的点 a 的邻域内。这时

$$A=\frac{1}{2\pi i}\int_K f(z)\,dz \tag{11.17}$$

与 K 的半徑无关，只由 $f(z)$ 在 $z=a$ 的邻域的数値确定。它叫做 $f(z)$ 在 $z=a$ 的**殘数**(residue)。其中积分路綫 K 的方向是对于上述含 a 的球帽的正的方向。即 a 若是有穷数值时，以 a 为中心反时針方向轉，$a=\infty$ 时 K 为以原点为中心、充分大的数为半徑的圓以原点为中心順时針方向轉。

今命 a 为有穷値，将 $f(z)$ 展成在 $z=a$ 的 Laurent 級数，则

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n. \tag{11.18}$$

因为这个級数在上述圓 K 上一致收斂，故把(11.18)代入(11.17)后可以逐項积分，即

$$A=\frac{1}{2\pi i}\int_K\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n\right\}dz=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\frac{1}{2\pi i}\int_K (z-a)^n dz.$$

我們已經証明了公式(参看 §7(5°))

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K (z-a)^n\,dz=\begin{cases}0 & (\text{当 } n\neq -1 \text{ 时}),\\ 1 & (\text{当 } n=-1 \text{ 时}),\end{cases}$$

由此立刻得出

$$A=c_{-1}. \tag{11.19}$$

即在 Gauss 平面上 $f(z)$ 在孤立奇点的殘数为在該点邻域的 Laurent 級数中 $(z-a)^{-1}$ 的系数。因此，假定

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

存在有穷且不等于零时，这个极限值就是 $f(z)$ 在 $z=a$ 的殘数。但是必須注意，这样求殘数的方法是充分的条件，而不是必要的条件。上述充分条件成立只是一級极点的情形（参看定理5），例如 $f_1(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}$ 及 $f_2(z)=e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots$，虽然 $\lim_{z\to 0} zf_1(z)=\infty$，$\lim_{z\to 0} ze^{\frac{1}{z}}$ 不存在，但由(11.19)知道，在 $z=0$ 的殘数都是1.

在 $z=\infty$ 的殘数完全可以同样地考察。这时 Laurent 級数为 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$，由于 K 是充分大半徑 ρ 的圓 $|z|=\rho$，方向是順时針的，所以

$$A=-c_{-1}. \tag{11.20}$$

定理6 命复数球面上可度长簡单閉曲綫 C（不通过 $z=\infty$）所包圍的域为 D，单値函数 $f(z)$ 在 D 的內部（就球面說）除去有穷个点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 的域 $D-\bigcup_{j=1}^{n}(z_j)$ 内为正則，且在添 C 后的点集 $C\cup\left\{D-\bigcup_{j=1}^{n}(z_j)\right\}$ 連續。于是

$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_{j=1}^{n}A_j, \tag{11.21}$$

其中 A_j 表示 $f(z)$ 在 z_j 的殘数。

証明 由定义几乎是显而易見的。

如这个定理的假設那样，有含 C 的开集 G，$f(z)$ 在 $G\cap\{C\cup D\}$ 連續的时候（在这定理的假設中，取 G 为全复数球面除去 $\bigcup_{j=1}^{n}(z_j)$ 剩余的部分即可），为了叙述簡便，叫做 $f(z)$ 关于 $D\cup C$ 在 C **的附近連續**。

如前所述，解釋极点为实际取复数球面上 ∞ 的点的話，可以考虑它与正則点几乎沒有差別，所以在复变函数論中所謂**半純**(或**有理型** meromorphic) 是具有以下的意义。即某单值函数在复数球面的域 D 内的任意点 z 或是正則或具极点时，則叫做 $f(z)$ 在 D **半純**，而对于在 D 内所有点都是单值正則，叫做 $f(z)$ 在 D **全純** (holomorphic) (除去 $z=\infty$ 外，在其余各点半純的函数，簡单地叫做半純函数，在除 $z=\infty$ 外各点全純的函数，則叫做**整函数**(参看 §10, 4)))。

今命 $f(z)$ 在复数球面的域 D 内半純，a 为 D 内的一点。先假定 a 为有窮点，考察

$$f'(z)/f(z)$$

在 $z=a$ 的情况。若 $f(z)$ 在 $z=a$ 正則且 $f(a)\neq 0$，則 f'/f 在該点正則。

(1) 若 $f(z)$ 在 $z=a$ 正則且 $f(a)=0$，則在 a 的邻域有一个自然数 m，$f(z)$ 可以写成

$$f(z)=(z-a)^m\{c+\varphi(z)\},\quad \varphi(a)=0,\quad c\neq 0,$$

其中 $\varphi(z)$ 在 $z=a$ 的邻域正則。于是

$$\log f(z)=m\log(z-a)+\log\{c+\varphi(z)\},$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-a}+\frac{\varphi'(z)}{c+\varphi(z)}.$$

因为 $\varphi'/(c+\varphi)$ 在 $z=a$ 正則，故 f'/f 的殘数由上式右端知道是 m。

(2) 若 $f(z)$ 在 $z=a$ 具 m 級的极点，則 $f(z)$ 在 $z=a$ 的邻域可用正則函数 $\varphi(z)$ 表示成

$$f(z)=\frac{c+\varphi(z)}{(z-a)^m},\quad c\neq 0,\quad \varphi(a)=0,$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{m}{z-a}+\frac{\varphi'(z)}{c+\varphi(z)}.$$

这时 f'/f 在該点的殘数为 $-m$.

其次,a 为 ∞ 的情形也可以类似地考察,其結果为 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 具 m 級的零点时,f'/f 在該处的殘数为 m,f 具 m 級的极点时 f'/f 的殘数为 $-m$,在其他各点 f'/f 的殘数全为零。今考察 $f(z)$ 在 D 半純且在 D 的边界 Γ 上正則的情形,这时候 $f(z)$ 在 D 內的零点及极点的个数均为有穷。因为相反地假定极点有无穷多个,則由于閉域 $D\cup\Gamma$ 在复数球面上为緊集,必有属于 $D\cup\Gamma$ 的点 p 存在,p 为极点的聚点,于是 p 不是孤立奇点,故它不是极点,自然更不是正則点。这与上述的假設不合。$f(z)$ 的零点为无穷多个的情形,可就 $1/f(z)$ 考察,也可得出同样的結論。

由以上的考察,对于 f'/f 应用定理 6,显然有以下的結果。

定理 7 复数球面上有可度长簡单閉曲綫 C (不通过 $z=\infty$ 点)所包圍的域 D,单值函数 $f(z)$ 在 D 內半純,在 C 上正則且不等于零。則下式成立:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=N-P, \tag{11.22}$$

其中 N 为 $f(z)$ 在 D 內零点的个数,P 为极点的个数,二者的个数都考虑重复度計算。

考虑重复度計算的詳細解釋是:$f(z)$ 在 D 內的零点为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,它們的級各为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,极点为 $b_1, b_2, \cdots, b_m$,它們的級各为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$,則

$$N=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n;\quad P=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m.$$

因为 f'/f 是 $\log f$ 的导数,故有人把

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \tag{11.23}$$

叫做 $f(z)$ 在 D 內的**对数殘数**。下面更具体地考虑一下这个量的意义。現在 C 是簡单閉曲綫,故 $w=f(z)$ 在 w 平面上也描画出一条閉曲綫。但 $\log f(z)$ 所画的曲綫則不一定是閉曲綫。由于

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{d}{dz}\log f(z),$$

所以 (11.23) 是将这个一般地非閉曲綫两端的差用 $2\pi i$ 除后所得的数值。因为

$$\log f(z)=\log|f(z)|+i\arg f(z),$$

所以 z 在 C 上旋轉一周时，$\log|f(z)|$ 仍然回到出发点而不发生变化。至于 $\arg f(z)$，設 $w=f(z)$ 所画的曲綫圍繞 $w=0$ 旋轉 K 次(以 $w=0$ 为中心,反时針方向为正,順时針方向为負),則最初 $\arg f(z)$ 的值与最后的值的差恰为 $2\pi K$。故这时 $\log f(z)$ 的差为 $2\pi iK$，結果 (11.23) 与 K 一致，故定理 7 可以改述为



图　11.4

定理 8　复数球面上有由簡单閉曲綫(不通过 $z=\infty$) 所包圍的域 D，单值函数 $f(z)$ 在 D 内部半純，在 C 上正則且不等于零。当 z 沿 C 关于 D 为正向旋轉一周时，若 $f(z)$ 的幅角发生的差为 $2K\pi$，則

$$K=N-P,$$

其中 N, P 各为 $f(z)$ 在 D 内零点及极点的个数(重复零点或极点应按重复的次数計算)。

証明　由于 $f(z)$ 在 C 上不能为零，也不能是 ∞，且 C 为复数球面上的紧集，命

$$l=\min_{z\in C}|f(z)|,\quad g=\max_{z\in C}|f(z)|,$$

則 $0<l\leqslant g<+\infty$。故满足

$$l/2<|f(z)|<2g$$

的 $f(z)$ 包含 C，且在 $D\cup C$ 上为开集，命 G 表示这个集，在 G 內作折綫 C' 逼近 C 时，則 K, N, P 不变，而 C' 为可度长簡单閉曲綫。把上面所述的考察适用于 C'，則定理 8 与定理 7 变成是相同的。

定理 8 通常叫做**幅角原理**，K 叫做 $w=f(z)$ 在平面 w 上所画

的曲綫关于点 $w=0$ 的**纏繞数**(windungszahl)。

Rouché 于 1862 年提出一个关于方程根的个数的定理。这个定理可以立刻由定理 8 导出。

定理 9 (Rouché 定理) 設 Gauss 平面上的 n 連通有界域 D 的边界是 Γ，若两个单值函数 $f(z)$，$\varphi(z)$ 在 D 内正则，在閉域 $D\cup\Gamma$ 連續，且在 Γ

$$|\varphi(z)|<|f(z)|, \tag{11.24}$$

则 $f(z)$ 与 $f(z)+\varphi(z)$ 在 D 内有相同个数的零点(重复零点应按重复的次数計算)。

証明 首先 $f(z)$ 及 $f(z)+\varphi(z)$ 在 Γ 上为連續，由 (11.24) 知道它們的絕对值滿足 $|f(z)|>0$, $|f(z)+\varphi(z)|\geqslant|f(z)|-|\varphi(z)|>0$，故由 Γ 是有界閉集知道

$$\min_{z\in\Gamma}|f(z)|, \quad \min_{z\in\Gamma}|f(z)+\varphi(z)|$$

同时都是正数，所以在 Γ 的附近 $f(z)$ 及 $f(z)+\varphi(z)$ 都沒有根，从而 $f(z)$ 及 $f(z)+\varphi(z)$ 在 D 内根的个数都是有穷个。另一方面，由于 $\min\limits_{z\in\Gamma}\{|f(z)|-|\varphi(z)|\}$ 也是正数，故在 D 上能够作出 n 个折綫 Γ' 逼近 Γ，在 Γ' 的内部 $f(z)$，$f(z)+\varphi(z)$ 的根的个数沒有改变，并且在 Γ' 上 $|f(z)|-|\varphi(z)|>0$ 成立。把折綫 Γ' 用在 D 内不过 $f(z)$，$f(z)+\varphi(z)$ 的根的折綫 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-1}$ 連結起来，使 D 的殘余部分成为单連通域，如图 11.5 所示。曲綫 Γ' 的方向是关于 D 的正向，对于 $\gamma_i(i=1, 2,\cdots, n-1)$ 则往返各一次，应用定理 8 于 $f(z)$ 及 $f(z)+\varphi(z)$，并注意幅角的差的計算是可以与曲綫弧的順序无关地加起来的。相当于 $\gamma_i(i=1, 2,\cdots, n-1)$ 的部分由于往返各一次故正負相消，因此沒有考察的必要。相当于 Γ' 的部分，就 n 个閉曲綫用

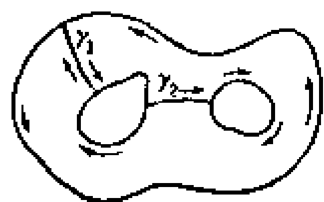


图 11.5

$$f(z)+\varphi(z)=f(z)\left\{1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right\},\qquad z\in\Gamma',$$

$$\arg\{f(z)+\varphi(z)\}=\arg f(z)+\arg\left\{1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right\}\quad(11.25)$$

計算。对于$1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}$，由于$|\varphi/f|<1$，故$\varphi/f$不論描繪怎样的曲綫常在$|w|<1$内，所以$1+w$不能圍繞$w=0$旋轉。从而

$$\arg\left\{1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right\}$$

对于任何閉曲綫它的差都是零，故由(11.25)知$\arg\{f(z)+\varphi(z)\}$与$\arg f(z)$的差相等。这样由定理8知道定理9成立。

5) **有理函数**　我們已經定义有理函数$f(z)$(参看§6的4)为两个有理整多項式

$$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n,$$
$$Q(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m\quad(b_m\neq 0)$$

的比，即

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}.\qquad(11.26)$$

本小节拟就其奇点的情况找出有理函数的特征。

首先由有理整多項式

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n\qquad(11.27)$$

的形状，可以看出在Gauss平面上到处单值正則。以$z=0$为中心、充分大的半徑作圓Γ，使在Γ上及其外边$f(z)\neq 0$。其次命

$$\varphi(z)=-(a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}),$$

则$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{f(z)}=0$，故在圓周$\Gamma$上有$|\varphi(z)|<|f(z)|$。由Rouché定理知道，在$\Gamma$的内部$f(z)$与$f(z)+\varphi(z)=a_nz^n$有相同个数的根，即有$n$个零点。因此証明了下列定理。

定理10(代数学基本定理)　n次有理整多項式在Gauss平面上恰好有n个零点(其中重根自然应当按它的重复度計算)。

今命 α 为 $f(z)$ 的一个根，因 $f(z)$ 被 $z-\alpha$ 除时，余数为 $f(\alpha)$，故 $f(z)$ 能被 $z-\alpha$ 整除，

$$f(z)=(z-\alpha)\varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$ 为 $n-1$ 次的有理整多项式。因此，当 $f(z)$ 的根为 α_1, α_2, …, α_n 时，則下式成立：

$$f(z)=c(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n). \tag{11.28}$$

比較两端最高次的系数有 $c=a_n$。应用这个結果証明下列定理。

定理 11 单值函数 $f(z)$ 分别是

(1) 常数；(2)有理整多项式；(3)有理函数

的充要条件为

(1) 在复数球面各点正則；

(2) 在 Gauss 平面上的各点正則，至多在 $z=\infty$ 有极点(所謂至多有极点是說正則或有极点的意思，在(2)中如沒有极点則化成(1)的情形)；

(3) 在复数球面上至多有极点。

証明 必要条件。(1)是显然的。(2)則将有理整多项式例如(11.27)展成在 $z=\infty$ 的 Laurent 級数，这一級数实际仍然和(11.27)一致。因此 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的 n 級极点。(3)的时候，設有理函数是(11.26)，由(11.28)命 $P(z)$，$Q(z)$ 的零点各为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$; β_1, β_2, …, β_m, 則

$$f(z)=\frac{a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)}{b_m(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_m)}. \tag{11.29}$$

因此 β_1, β_2, …, β_m 为可去奇点或极点。在 Gauss 平面上的其他各点 $f(z)$ 正則。在 $z=\infty$ 处当 $n>m$ 时有 $n-m$ 級极点。其他的情形在 $z=\infty$ 正則。

充分条件。(1)滿足时，因为在 $z=\infty$ 的邻域，函数也有界，于是在全 Gauss 平面有界，由 Liouville 定理 $f(z)$ 为常数。

(2)的情形。在 $z=0$ 的邻域可以展成幂級数，因其收斂半徑为 ∞，故它也是在 $z=\infty$ 处的 Laurent 展开。由假設 $z=\infty$ 为极点，故展开式只有有穷項，其余全为零，卽 $f(z)$ 为有理整多項式。

(3)成立时，因为复数球面是緊集，故极点的个数只能是有穷个。今命 $z_1, z_2, \cdots, z_\nu$ 表示 $f(z)$ 的极点，在极点 z_ν 处 $f(z)$ 的主部用

$$P_i\left(\frac{1}{z-z_i}\right) \quad (z_i\text{ 为有穷数时})$$

或

$$P_i(z) \quad (z_i=\infty\text{ 时})$$

表示。$\nu=0$ 的情形显然是对的，今命 $\nu>0$，考察函数

$$g(z)=f(z)-\sum_{i=1}^{\nu} P_i\left(\frac{1}{z-z_i}\right)$$

$$\left(\text{其中 } z_i=\infty \text{ 的情形則用 } z \text{ 代替 } \frac{1}{z-z_i}\right),$$

則 $g(z)$ 在复数球面上的任何点都正則，故由(1)知道 $g(z)$ 是一常数，卽 $g(z)\equiv C$，或

$$f(z)=\sum_{i=1}^{\nu} P_i\left(\frac{1}{z-z_i}\right)+C.$$

由上式的右端可知 $f(z)$ 是有理函数。

我們已經証完了定理 11. 在这一証明的 (11.29) 中显然可以看出，有理函数的有穷极点为 m 个，有穷零点为 n 个(其中极点与零点相重合时应从双方减去相同的数)，在 $z=\infty$ 处若 $n>m$，則有 $n-m$ 級的极点，$n=m$ 时則为正則点，$n<m$ 时則有 $m-n$ 級的零点，**因此零点的总个数与极点的总个数相等**。由这一結果得出下列重要結果。

有理函数 $f(z)$ 表示成如 (11.26) 那样为两个有理整多項式 $P(z)$，$Q(z)$ 的比时，若 $P(z)$ 及 $Q(z)$ 有公因子，則由 Euclid 的輾轉相除法可求出它們的最高公因子，然后再由 $P(z)$，$Q(z)$ 中消去这

一最高公因子，因此我們不妨一开始就认作 $P(z)$，$Q(z)$沒有公共因子而命

$$f(z)=P(z)/Q(z), \tag{11.30}$$

这样由 $P(z)$，$Q(z)$所表示的(11.30)叫做**既約**形，这时 $P(z)$的次数 n 及 $Q(z)$的次数 m 中較大的一个，叫做**有理函数 $f(z)$ 的次数** (degree)。

定理 12 不是常数的有理函数 $f(z)$，当 z 在复数球面上移动时，則取复数球面上任意值的次数都相同，并且这个次数与$f(z)$的次数一致 (其中 $f(z)$ 所取的值为 $w=\infty$ 时，則这时 z 为极点)。$f(z)$ 取两个不相同的 w 值的 z 在 Gauss 平面的位置及重复次数給定时，这样的有理函数 $f(z)$就能够求出来。

証明 給定的值 $w=\alpha$ 是零及 ∞ 的情形前面已經証明了。因此現在可以假定 $\alpha\neq 0, \infty$。由 $f(z)$作

$$g(z)=f(z)-\alpha,$$

則使 $f(z)=\alpha$ 的点与 $g(z)$ 的零点一致。因此，$f(z)$ 取 α 的次数与 $g(z)$ 的零点的个数相同。因 $g(z)$ 也是有理函数，故这个数等于 $g(z)$ 的次数。$g(z)$用既約形式

$$g(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$$

表示时，則 $f(z)=\dfrac{P(z)+\alpha Q(z)}{Q(z)}$ 也是既約形，且易知 $g(z)$与 $f(z)$ 的次数相等。所以 $f(z)$ 取 α 的回数与 $f(z)$的次数相等。

定理的最后部分，由于 $\alpha\neq\beta$，不失普遍性可設 $\beta\neq 0$。令

$$f(z)=\frac{g(z)+\alpha}{\left(\dfrac{1}{\beta}\right)g(z)+1},$$

欲求 $f(z)$，只須指定 $g(z)$的零点及极点的位置及重复度。設位置各为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$；$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$，重复度各为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$；$q_1, q_2, \cdots, q_m$，則得出 $g(z)$ 的解为

$$g(z)=K\frac{(z-\alpha_1)^{p_1}(z-\alpha_2)^{p_2}\cdots(z-\alpha_n)^{p_n}}{(z-\beta_1)^{q_1}(z-\beta_2)^{q_2}\cdots(z-\beta_m)^{q_m}}.$$

因此$f(z)$就被确定，且滿足定理的条件。

我們計算零点及极点的个数，一直是直接应用(11.29)。应用定理7也可以簡单地得出相同的結果。理由是只要有理函数不恒等于零，则在Gauss平面上有一点z_0，使$f(z_0)\neq 0$，并且z_0不是$f(z)$的极点。以z_0为中心、充分小的半徑作圓。命C表示圓周，C的外部为D，內部为D_1，圓的半徑充分小时可使$f(z)$在D_1內为有穷而不等于零。故f'/f在D_1正則，因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=0.$$

从而

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-C}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=0,$$

$-C$为关于C的外部为正向的边界。故由定理7必定$N=P$.

用$f(z)$代替f'/f关于C及D施行同样的計算，再引用定理6，这样就得出以下的結果：

$$\sum_{j=1}^{n}A_j=0,$$

即

定理 13 有理函数所有极点的殘数与在$z=\infty$的殘数的和为零。

但須注意$z=\infty$纵是函数的正則点，它的殘数一般不等于零。

6) 孤立本性奇点，Casorati-Weierstrass 定理 本节目的虽是研討可去奇点及极点，但关于两种都不是的，即孤立本性奇点的性质，由上述結果也能够簡单理解的，亦附带叙述于此。

我們已經知道，单值函数$f(z)$在它的正則点或可去奇点a处，$\lim\limits_{z\to a}f(z)$存在且有穷，a是极点的时候，$\lim\limits_{z\to a}f(z)$虽确定，但它的值为∞。对于孤立本性奇点，Weierstrass于1876年发現了下述重

要性质。

定理 14 (Casorati-Weierstrass 定理) $f(z)$ 以复数球面的一点 a 为孤立本性奇点，c 为复数球面上的任意值，則 $f(z)$ 在点 a 的邻域內可以无穷接近 c。

定理的意思是說，給定任意的 c，能够在 a 的邻域取出点列 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$，使

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = c \tag{11.31}$$

同时成立。

証明 今采用归謬法証明这一定理。假定在复数球面上有数值 c 存在，任何滿足 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ 的点列 $\{z_n\}$ 不能使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = c$ 成立。对于这个 c，有以 a 为中心的球帽 $V(a)$，及以 c 为中心的球帽 $V(c)$，当 $z \in V(a)$ 时 $f(z) \overline{\in} V(c)$.

$c=\infty$ 时 $f(z)$ 在 $V(a)$ 內为有界。因此由定理 1，$z=a$ 是 $f(z)$ 的可去奇点，这与題設違背。c 为有穷数值时，考察

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - c},$$

則 $g(z)$ 在 $V(a)$ 內除 a 点外为单值正則且有界。因此 $z=a$ 为 $g(z)$ 的可去奇点，故 a 可以考虑为 $g(z)$ 的正則点。若 $g(a)=0$，則 $f(z)-c$ 从而 $f(z)$ 在 $z=a$ 有极点。若 $g(a)\neq 0$，則 $f(z)-c$ 从而 $f(z)$ 在 $z=a$ 正則。任何情況下 $z=a$ 都不是本性奇点，与題設違背。

(証毕)

极点虽然是奇点，但有很多和正則点接近的地方。根据这一理由，可将孤立本性奇点更一般化，考虑 $f(z)$ 在 $z=a$ 的邻域除 a 点本身外是半純(有理型)的情形。这样的 a 姑叫做**一般孤立本性奇点**。关于这种奇点，可以得出完全与定理 14 同样的結果。

定理 15 单值函数 $f(z)$ 以 $z=a$ 为一般孤立本性奇点的情形，对于复数球面上的任意值 c，有滿足 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ 的点列 $\{z_n\}$ 存在，使

得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=c$。

証明　假定有球帽 $V(a)$ 及 $V(c)$，当 $z\in V(a)$ 时 $f(z)\overline{\in} V(c)$。这样 $c=\infty$ 时 $f(z)$ 在 $V(a)$ 内沒有极点，因此归并为定理 14 的情形。c 为有穷的情形，命

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-c}, \tag{11.32}$$

则与定理 14 的証明完全相同，卽能推导出欲求的結果。但在 (11.32)，$f(z)$ 在 $z=b\in V(a)$ 有极点时，应当命 $g(b)=0$。

单值函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 的邻域除 a 本身外正则的情形及半純的情形之間最大的差别是正則的时候，当在包圍 a 点的曲綫 Γ_n $(n=1, 2, \cdots)$ 上 $f(z)$ 有界且 Γ_n 收斂于 a 点（更詳細的說則为 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(\Gamma_n, a)=0$）时，点 a 为可去的；但半純的时候就沒有这种性质。例如在

$$\cot z=i\left(\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}\right)$$

中，考虑点 $a=\infty$，$\cot z$ 在 Gauss 平面上半純，故 $a=\infty$ 为 $\cot z$ 的一般孤立本性奇点。命 Γ_n 为以 $z=0$ 为中心、边长为 $(2n+1)\pi$ 的正方形（边平行于坐标軸），则在 Γ_n 的周界上有 $|\cot z|<2$。事实上，命 $z=x+iy$，则当 $|x|=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 时，有

$$|\cot z|=\frac{|1-e^{-2y}|}{1+e^{-2y}}<1.$$

又在 $|y|=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 处，由于 $e^{(2n+1)\pi}>3$，故

$$|\cot z|=\left|\frac{e^{2ix}e^{-2y}+1}{e^{2ix}e^{-2y}-1}\right|<\frac{e^{-2y}+1}{|e^{-2y}-1|}=\frac{e^{(2n+1)\pi}+1}{e^{(2n+1)\pi}-1}<2.$$

这时当 $n\to\infty$ 时 Γ_n 收斂于 $a=\infty$。

E. Picard 于 1879 年把 Casorati-Weierstrass 定理推广为下列定理。

定理 16 单值函数 $f(z)$ 以 $z=a$ 为一般孤立本性奇点时，最多除去两个(复数球面上的)值外，$f(z)$ 在 $z=a$ 的任意邻域取剩余的所有值 c。

定理的意思是說，在复数球面上至多有 c_1, c_2 两个値存在，当 $c\neq c_1$, $c\neq c_2$ 时有滿足

$$\lim_{n\to\infty} z_n=a, \quad f(z_n)=c$$

的点列 $\{z_n\}$ 存在。

証明这个定理及其推广是第 7 章的主要目的，Picard 在得出这个定理証明之前，先发表了下面的比較簡单的推論。

系 不是有理整函数的任意整函数，最多有一个有穷值是例外，对于其他的所有有穷值取无穷多次。

因为整函数在 Gauss 平面上沒有极点，故命 $c_1=\infty, a=\infty$，然后即可适用定理 16，所以这个系是定理 16 的特殊情形。上述系通常叫做 **Picard 小定理**，定理 16 相对地叫做 **Picard 大定理。**

§12 Morera 定理及其应用

Cauchy 定理的逆定理，可用 Cauchy 定理結果之一的 Goursat 定理簡单推出。

1) **Morera 定理** 下列定理 1 是 Morera 于 1886 年发现的，因此叫做 Morera 定理。

定理 1 在 Gauss 平面域 D 定义的单值連續函数 $f(z)$，对于任意 D 内的矩形，矩形的边平行于坐标軸，矩形的內部不包含 D 的边界点，滿足

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz=0 \quad (\text{其中 } \Gamma \text{ 为矩形的周界}), \qquad (12.1)$$

則 $f(z)$ 在 D 內正則。

証明 命 z 为 D 内的任一点，以 z 为中心、充分小的半徑画

圓S，則S的周界及内部能够完全包含在D内。其次命z_0为S内的一点，把它固定，由z_0出发到S内一点z_1画折綫C，使C只由平行于坐标軸的綫段构成，沿这折綫C的积分

$$(C)\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz, \tag{12.2}$$

由(12.1)知道只与z_0，z有关而与积分路綫C无关(C应当限定在S内)。因此积分(12.2)在S中为z_1的单值函数(z_0为固定)。把它在$z_1=z$微分时，导数存在且等于$f(z)$(参看§8例1)。因此

$$F(z_1)=(C)\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz \quad (z_1\in S,\ C\subseteq S)$$

在S内单值正則，它的导数等于$f(z)$。故$f(z)$是单值正則函数的导函数，由Goursat定理知$f(z)$也在S内正則。

又定理1(Morera定理)中的矩形可以换成正方形，这时定理仍然成立。

2) **Painlevé定理**　Painlevé于1888年証明了下列定理。

定理2　Gauss平面上有两个域D_1，D_2，以一可度长的簡单曲綫Γ为边界，并在Γ的两側。若单值函数$f(z)$在域$D_1\cup\Gamma\cup D_2$上連續，在D_1，D_2的内部正則，則$f(z)$在整个域$D_1\cup\Gamma\cup D_2$内部正則。

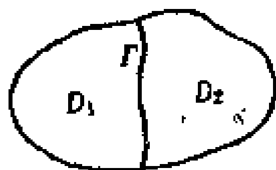


图　12.1

証明　作任意的正方形C連同其内部含于整个域$D_1\cup\Gamma\cup D_2$的内部，使C既含D_1的一部分，又包含D_2的一部分。C的内部Δ与D_1的公共部分$\Delta\cap D_1$至多分为可数个域Δ_1'，Δ_2'，…，它們的边界Γ_1'，Γ_2'，…由C及Γ的一部分构成。因此$\Delta_n'(n=1,2,\cdots)$中不論是那一个都是单連通的，故由Cauchy定理有

$$\int_{\Gamma_n'} f(z)dz=0. \tag{12.3}$$

同样$\Delta\cap D_2$也是至多分为可数个单連通域Δ_1''，Δ_2''，…，它們的边界

为 $\Gamma_1^2, \Gamma_2^2, \cdots$, 故

$$\int_{\Gamma_m^2} f(z)dz=0 \quad (m=1, 2, \cdots). \tag{12.4}$$

对于充分多的 Γ_n', Γ_m^2 把(12.3)及(12.4)相加，则边界在 Γ 上的部分，若在 D_1, D_2 两侧都出现的时候，则积分变数的运动方向恰好相反，互相抵消。因此可任意接近

$$\int_C f(z)dz. \tag{12.5}$$

因此(12.5)等于0. 故由 Morera 定理知道 $f(z)$ 在 $D_1\cup\Gamma\cup D_2$ 必为正则。

3) **可去集** 如定理 2 中的 Γ, $f(z)$ 在 Γ 上实际虽是正则的，但最初沒有假定是正则的点集，这样自然与可去奇点有联系。用至多可数个圓 $C_1, C_2, \cdots, C_n, \cdots$ 复盖这个点集 Γ，且此等圓的半徑 r_n 的和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n$ 小于預先給定的任意正数，则叫做 **Γ 的长或 Γ 的一維測度**(Linear measure)**为 0.**

定理 3 Gauss 平面上的域 D 内有一維測度为 0 的有界閉集 Γ，若单值函数 $f(z)$ 在 D 有界，在 $D-\Gamma$ 正则，则 $f(z)$ 在 $z_1\in\Gamma$ 的任意 z_1 处，极限值

$$\lim_{z\to z_1} f(z)$$

存在，且用这个值定义为 $f(z_1)$ 时，则 $f(z)$ 在 D 内部的各点正则。

証明 Γ 是有界閉集且含于域 D 内，因之在 D 内可以画閉簡单折綫 C，使 C 所包圍的域 Δ 含于 D，并且 Γ 含于 Δ 的內部。其次，由于 Γ 的一維測度为 0，对于任意給定的正数 ε，有至多可数个圓 $C_1, C_2, \cdots$，它們的內部併能够把 Γ 复盖，并且这些圓的半徑和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n$ 小于 ε. 因为 C 的外部与 Γ 的距离 $\rho=\rho(C, \Gamma)$ 是正数，取 $\varepsilon<\frac{\rho}{2}$，则 $C_n(n=1, 2, \cdots)$ 完全在 C 内。另一方面，由于 Γ

是紧集，故有穷个

$$C_1, C_2, \cdots, C_N$$

就能够把 Γ 复盖。这些圆的内部的併 G 为开集，命 C' 表示它的边界，对于

$$z \in \Delta - (G \cup C') \tag{12.6}$$

的 z，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{12.7}$$

$f(z)$有界，故有满足$|f(z)| < M < +\infty (z \in D)$的 M 存在，再命 z 与 C' 的距离为 δ，則

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\delta} l < M\varepsilon/\delta, \tag{12.8}$$

其中 l 为 C' 的长，它小于 $2\pi\sum r_n$，故小于 $2\pi\varepsilon$。命 $z \in \Delta - \Gamma$ 且把 z 固定，使 ε 收斂于零，(12.6)一定成立，故(12.7)也成立，并且(12.7)右端第二项等于0。

即当 $z \in \Delta - \Gamma$ 时，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

上式右端即令在 Γ 也是正則的，故定理3成立。

4) **Pompeiu 的例**　关于定理3，Pompeiu 于1905年提出了下列有趣的例。命 I 表示长度为1的区間 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$p_1, q_1$ 为满足 $0 < p_1 < 1$，$q_1 = 1 - p_1$ 的两个正数。取开区間 I_1，它的长为 p_1，中点与 I 的中点一致，自 I 除去 I_1 后，两側还各剩长 $\frac{q_1}{2}$ 的閉区間。命 $I(0)$，$I(1)$ 依次表示这两个区間。其次命 p_2，q_2 为满足 $0 < p_2 < 1$，$q_2 = 1 - p_2$ 的两个正数。各取以 $I(0)$，$I(1)$ 的中点为中点，长度为 $\left(\frac{q_1}{2}\right)p_2$ 的开区間，把这些开区間除去后，两側剩长度为 $\left(\frac{q_1}{2}\right)\left(\frac{q_2}{2}\right)$ 的閉区間。命 $I(0,0)$，$I(0,1)$，$I(1,0)$，$I(1,1)$ 依次表示这四个区間。其次再命 p_3，q_3 为满足 $0 < p_3 < 1$，$q_3 = 1 - p_3$ 的正数，同样地作下去。这样反复作到第 n 次，自 I 去掉的部分的全长为：

$$p_1+2(q_1/2)p_2+4(q_1/2)(q_2/2)p_3+\cdots+2^{n-1}(q_1/2)\cdots(q_{n-1}/2)p_n$$
$$=(1-q_1)+q_1(1-q_2)+q_1q_2(1-q_3)+\cdots+q_1q_2\cdots q_{n-1}(1-q_n)$$
$$=1-q_1q_2\cdots q_n.$$

所以剩下的2^n个閉区間的全长为$q_1q_2\cdots q_n$. 特别命

$$p_n=\left(\frac{1}{n+1}\right)^2,\quad q_n=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)},$$

則

$$q_1q_2\cdots q_n=\frac{n+2}{2(n+1)},$$

故命$n\to\infty$时，仍能剩下的部分A的长度为$\frac{1}{2}$. 对于$0\leqslant y\leqslant 1$也用同样的作法得出长度为1/2的疏散完全集B. 若命$A\times B$表示滿足$x\in A$, $y\in B$的点(x, y)的全体，則$A\times B$的面积为$\frac{1}{4}$. 命

$$E=A\times B,$$

复变函数

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\iint_E\frac{d\zeta_1 d\zeta_2}{\zeta-z},\quad \zeta=\zeta_1+i\zeta_2, \tag{12.9}$$

就是欲求的Pompeiu函数。

(1) $f(z)$在全Gauss平面单值連續且有界，$f(z)$在$z_0\bar{\in}E$显然連續，今証明$f(z)$在$z_0\in E$的点$z=z_0$連續。

为此，以z_0为中心、以$1/n\ (n=1, 2, \cdots)$为半徑作圓，E的点在这个圓內部的叫作E_n，其余的部分叫作E_n'，則

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\iint_{E_n}\frac{d\zeta_1 d\zeta_2}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi}\iint_{E_n'}\frac{d\zeta_1 d\zeta_2}{\zeta-z}. \tag{12.10}$$

首先估計第一个积分

$$\left|\frac{1}{2\pi}\iint_{E_n}\frac{d\zeta_1 d\zeta_2}{\zeta-z}\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\iint_{E_n}\frac{d\zeta_1 d\zeta_2}{|\zeta-z|}<\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta-z_0|<2/n}\frac{d\zeta_1 d\zeta_2}{|\zeta-z_0|}.$$

命$z_0=x_0+iy_0$, $\zeta_1-x_0=r\cos\theta$, $\zeta_2-y_0=r\sin\theta$, 則由于

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta-z_0|<2/n}\frac{d\zeta_1 d\zeta_2}{|\zeta-z_0|}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2/n}dr\,d\theta=\frac{2}{n},$$

故一致地，

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{E_n'}\frac{d\zeta_1 d\zeta_2}{\zeta-z}\to f(z).$$

上列积分在$z=z_0$是連續的，故$f(z)$在$z=z_0$連續。又显然

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=0,$$

故 $f(z)$ 在全平面有界。$|f(z)|$ 的最大值当在 E 达到，在 (12.10) 中命 $n=\frac{1}{2}$，则第一积分小于 4，第二积分为 0（因 E'_n 为空集）。

(2) $f(z)$ 在 $z\bar{\in} E$ 正則。当 $z\bar{\in} E$ 时，因 E 是閉集，故 $\rho=\rho((z), E)>0$。另一方面，由 E 的构成方法，在 n 步操作中，x 軸，y 軸上都出現 2^n 个閉区間

$$I(i_1, i_2, \cdots, i_n),\quad i_\nu=0 \text{ 或 } 1\quad (\nu=1, 2, \cdots, n).$$

这样的区間共有 2^n 个，为簡便起見用 $I_j^n (j=1, 2, \cdots, 2^n)$ 表示。今任意挑选满足 $x_j^n\in I_j^n\cap A$，$y_j^n\in I_j^n\cap B$ 的点 x_j^n，y_j^n，命

$$z_{jj'}^n=x_j^n+iy_{j'}^n,$$

则 $E\cap(I_j^n\times I_{j'}^n)$ 的面积为 $\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)$，故由积分的定义有

$$\frac{1}{2\pi}\iint_E\frac{d\zeta_1 d\zeta_2}{\zeta-z}=\lim_{n\to\infty}A_n,\quad A_n=\sum_{j,j'=1}^{2^n}\frac{1}{z_{jj'}^n-z}\quad\frac{1}{2^{2n+2}}.$$

对于满足 $n'>n$ 的自然数 n'，若 $z_{jj'}^{n'}$ 含于 $I_j^n\times I_{j'}^n$，由于这矩形的直徑是

$$\delta(I_j^n\times I_{j'}^n)<\sqrt{2}/2^n,$$

故

$$\left|\frac{1}{z_{jk}^n-z}-\frac{1}{z_{lm}^{n'}-z}\right|<\frac{\sqrt{2}}{\rho^2 2^n}.$$

因此对 z 說，极限 $\lim_{n\to\infty}A_n$ 一致收斂。只要 $z\bar{\in} E$，A_n 是 z 的正則函数，故 $f(z)=\lim_{n\to\infty}A_n$ 是 z 的正則函数。

(3) $f(z)$ 不等于常数。这是由于 $\lim_{z\to\infty}f(z)=0$ 而 $f(0)\neq 0$。事实上

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\iint_E\frac{d\zeta_1 d\zeta_2}{\zeta_1+i\zeta_2}=\frac{1}{2\pi}\iint_E\frac{\zeta_1-i\zeta_2}{\zeta_1^2+\zeta_2^2}\,d\zeta_1 d\zeta_2,$$

$$\Re f(0)=\frac{1}{2\pi}\iint_E\frac{\zeta_1}{\zeta_1^2+\zeta_2^2}\,d\zeta_1 d\zeta_2.$$

命满足 $\zeta_1\geqslant\frac{1}{2}$ 的 E 的部分为 E_1，则 E_1 的面积恰好是 E 的面积的 $1/2$，更由于 $\zeta_1^2+\zeta_2^2\leqslant 2$，故

$$\Re f(0)\geqslant\frac{1}{2\pi}\iint_{E_1}\frac{\zeta_1 d\zeta_1 d\zeta_2}{\zeta_1^2+\zeta_2^2}>\frac{1}{2\pi}\iint_{E_1}\frac{1/2}{2}\,d\zeta_1 d\zeta_2=\frac{1}{64\pi}.$$

由 Liouville 定理，知 $f(z)$ 在 E 中至少有一个奇点。重复(2)的証法，可以知道 E 的所有点都是奇点。

5) **Looman-Меньшов 定理** 在 Gauss 平面上的域 D 内 $f(z)$ 单值連續，例外点集 $E(E\subseteq D)$ 是可数集时，Looman 于 1923 年給出了下列定理，但証明是不完备的，Меньшов 于 1933 年訂正了这个缺陷❶。

定理 4 D 是 Gauss 平面上的域，$f(z)$ 在 D 单值連續。E 是含于 D 的至多可数点集，在 $D-E$，

$$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$$

的实部与虚部 $u(x, y)$，$v(x, y)$ 的一阶偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y}$$

有穷，存在，且除却某 Lebesgue 测度零集，滿足 Cauchy-Riemann 关系式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{12.11}$$

于是，$f(z)$ 在整个 D 正則。

証明 今介紹 Меньшов 的証明。

引理 R 是边平行于坐标軸的正方形，$w(x, y)$ 是在 R 的内部及边界上的单值連續实函数。$\mathfrak{F}$ 是含于 R 的閉集，R' 是含 $\mathfrak{F}$ 且边平行于坐标軸的最小矩形，命 R' 的四个頂点为 (x_1, y_1)，(x_2, y_1)，(x_1, y_2)，(x_2, y_2) $(x_1\leqslant x_2, y_1\leqslant y_2)$. 假定有有穷正常数 M，对于滿足

$$(x, y)\in\mathfrak{F},\quad (x+h, y+k)\in R$$

的所有的 x, y, h, k，

$$\begin{aligned}|w(x+h, y)-w(x, y)|&\leqslant M|h|,\\ |w(x, y+k)-w(x, y)|&\leqslant M|k|\end{aligned} \tag{12.12}$$

---

❶ 参看：Menchoff: Sur la généralization des conditions de Cauchy-Riemann, Fundam. Math. 25, 59—97 (1935) 或 Saks: Theory of the integral, 199—201, 1937, 英譯版。——譯者注

成立，則下列不等式成立：

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}\{w(x,\,y_2)-w(x,\,y_1)\}dx-\iint_{\mathfrak{F}}\frac{\partial w}{\partial y}\,dx\,dy\right|\leqslant 5M\,\mathrm{mes}(R-\mathfrak{F}),$$

$$\left|\int_{y_1}^{y_2}\{w(x_2,\,y)-w(x_1,\,y)\}dy-\iint_{\mathfrak{F}}\frac{\partial w}{\partial x}\,dx\,dy\right|\leqslant 5M\,\mathrm{mes}(R-\mathfrak{F}).$$

(12.13)

这里偏微商 w_x，w_y 至多除去可数个例外点存在并且有穷；$\mathrm{mes}(R-\mathfrak{F})$ 表示 $R-\mathfrak{F}$ 的 Lebesgue 测度。

引理的証明　首先，由 R' 的定义知道，R' 与 x 軸平行的两边上各有 $\mathfrak{F}$ 的点 $(x',\,y_1)$，$(x'',\,y_2)$，故对于满足 $x_1\leqslant\xi\leqslant x_2$ 的所有的 ξ，有

$$\begin{aligned}&|w(\xi,\,y_2)-w(\xi,\,y_1)|\\&\quad\leqslant|w(\xi,\,y_2)-w(x'',\,y_2)|+|w(x'',\,y_2)-w(x',\,y_2)|\\&\qquad+|w(x',\,y_2)-w(x',\,y_1)|+|w(x',\,y_1)-w(\xi,\,y_1)|.\end{aligned}$$

因此由(12.12)，l 为 R 的边长时，得下列不等式：

$$|w(\xi,\,y_2)-w(\xi,\,y_1)|\leqslant 4Ml. \tag{12.14}$$

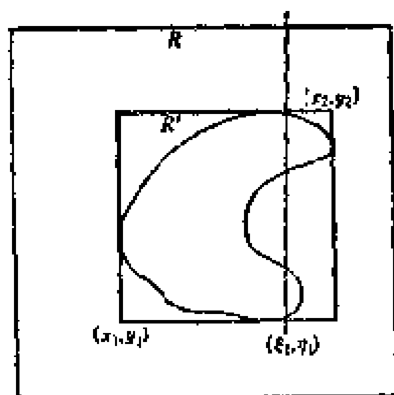


图　12.2

其次，命 $\mathfrak{F}$ 在 x 軸上的垂直射影为 $\mathfrak{A}$，这是一个閉集且含于閉区間 $[x_1\leqslant x\leqslant x_2]$，命 $\mathfrak{B}=[x_1\leqslant x\leqslant x_2]-\mathfrak{A}$。对于满足 $\xi\in\mathfrak{A}$ 的任意的 ξ，用 $\mathfrak{F}_\xi$ 表示满足 $(\xi,\,y)\in\mathfrak{F}$ 的 y 的集。当 $\xi\in\mathfrak{A}$ 时，可以考虑 $\mathfrak{F}_\xi$ 为空集。$\mathfrak{F}_\xi$ 为一維的閉集，命 $l(\mathfrak{F}_\xi)$ 表示它的 Lebesgue 测度。今按照以下的叙述，定义实函数 $w_\xi(y)$。

1°）$(\xi,\,y)\in\mathfrak{F}$ 时，$w_\xi(y)=w(\xi,\,y)$。

2°）在 $(\xi,\,y_1)$ 及 $(\xi,\,y_2)$，仍是 $w_\xi(y_i)=w(\xi,\,y_i)$ $(i=1,\,2)$。

3°）其余的 y 属于 $\mathfrak{F}_\xi$ 的余集，即至多可数个余区間。取两端

点的值,中途则定义为綫性函数。

这样,除去至多可数个例外点以及余区間的端点, $w'_\xi(y)$ 存在且 $|w'_\xi(y)|\leqslant M$. 故

$$w(\xi, y_2)-w(\xi, y_1)=w_\xi(y_2)-w_\xi(y_1)=\int_{y_1}^{y_2} w'_\xi(y)\,dy$$

$$=\int_{\mathfrak{F}_\xi} w'_\xi(y)\,dy+\int_{[y_1, y_2]-\mathfrak{F}_\xi} w'_\xi(y)\,dy$$

其中 $[y_1, y_2]=[y_1\leqslant y\leqslant y_2]$,

$$\left|w(\xi, y_2)-w(\xi, y_1)-\int_{\mathfrak{F}_\xi}\frac{\partial w}{\partial y}\,dy\right|\leqslant\left|\int_{[y_1, y_2]-\mathfrak{F}_\xi} w'_\xi(y)\,dy\right|$$

$$\leqslant M\int_{[y_1, y_2]-\mathfrak{F}_\xi} dy=Ml\{[y_1, y_2]-\mathfrak{F}_\xi\}=M\{y_2-y_1-l(\mathfrak{F}_\xi)\}.$$

将此式关于 ξ 在 $\mathfrak{A}$ 上积分,有

$$\left|\int_{\mathfrak{A}}\{w(\xi, y_2)-w(\xi, y_1)\}\,d\xi-\iint_{\mathfrak{F}}\frac{\partial w}{\partial y}\,dy\,d\xi\right|$$

$$\leqslant M\,\mathrm{mes}(R'-\mathfrak{F})\leqslant M\,\mathrm{mes}(R-\mathfrak{F}). \tag{12.15}$$

其次,由(12.14)

$$\left|\int_{\mathfrak{B}}\{w(\xi, y_2)-w(\xi, y_1)\}\,d\xi\right|\leqslant 4Ml\int_{\mathfrak{B}} d\xi=4Ml\cdot l(\mathfrak{B})$$

$$\leqslant 4M\,\mathrm{mes}(R-\mathfrak{F}). \tag{12.16}$$

把(12.15)及(12.16)的两端相加,卽得出(12.13)的第一个不等式。$\left(\text{这时候,由于}\left|\frac{\partial w}{\partial y}\right|\leqslant M\right.$, 故由 Fubini 定理,重积分的順序不成問題。)

調換 x, y,上述推論仍然成立,故第二个不等式也成立。因此証明了引理。

定理 4 的証明 用归謬証法証明。卽假定 $f(z)$ 在 D 内不正则的点集为 Q, 且 Q 不是空集。任取 Q 的一点 q, 以 q 为中心、充分小的半徑作圓,圓的内部为 Δ, Δ 与不属于 D 的点的最短距

离 ρ 是正数。

其次，任意挑选满足 $\mu\rho>1$ 的自然数 μ，对于 $m=\mu,\ \mu+1,\ \mu+2,\cdots$ 的 m 及 h，只要 $(x+h,\ y)\in D$，则

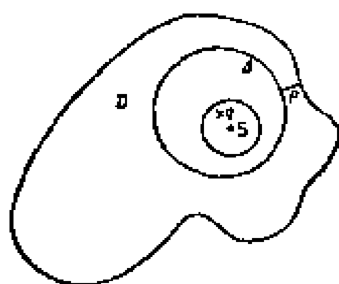


图　12.3

$$|u(x+h,\ y)-u(x,\ y)|\leqslant m|h| \tag{12.17}$$

成立的 $(x,\ y)\in\varDelta$ 的全体，叫作 $A(m,\ h)$。因 $u(x,\ y)$ 連續，故 $A(m,\ h)$ 是閉于 $\varDelta$ 的集。再命

$$A(m)=\bigcap_{0<|h|<\frac{1}{m}}A(m,\ h), \tag{12.18}$$

则 $A(m)$ 显然也是閉于 $\varDelta$ 的集。用由(12.17)出发定义(12.18)同样的步驟，由

$$|u(x,\ y+h)-u(x,\ y)|\leqslant m|h| \tag{12.19}$$

出发，所得的集叫作 $B(m)$，再用 $v(x,\ y)$ 代替 $u(x,\ y)$，命所得的集为 $C(m)$，$D(m)$。因为每一个都是閉于 $\varDelta$ 的集，作

$$P_m=A(m)\cap B(m)\cap C(m)\cap D(m), \tag{12.20}$$

则 P_m 也是閉于 $\varDelta$ 的集。

今命 $Q\cap\varDelta=P$，Q 是閉于 D 的集，故 P 是閉于 $\varDelta$ 的集。任取 $P-P\cap E$ 的一点 $(x,\ y)$，在該点偏微商 $u_x,\ u_y,\ v_x,\ v_y$ 存在且有穷，故有 $\delta=\delta(x,\ y)>0$ 及充分大的正数 G，只要 $|h|<\delta$，则

$$\left|\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}\right|,\quad\left|\frac{u(x,\ y+h)-u(x,\ y)}{h}\right|$$

以及用 v 代替 u 的另外两个值都小于 G，即当 $m>\max\left(\frac{1}{\delta},\ G\right)$ 时，$(x,\ y)\in P_m$。因此得出

$$P=\left\{\bigcup_{m=\mu}^{\infty}(P_m\cap P)\right\}\cup(E\cap P). \tag{12.21}$$

另一方面，E 是可数的，将 $E\cap P$ 的各点看作一个集 Q_n，则(12.21)可以写成

$$P=\left\{\bigcup_{m=\mu}^{\infty}(P_m\cap P)\right\}\cup\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}Q_n\right\},\qquad(12.22)$$

其中各项 $(P_m\cap P)$ 及 Q_n 都是閉于 P 的集，故由 Baire 定理有足碼 m_0 及 n_0 存在，使得 $P_{m_0}\cap P$ 或 Q_{n_0} 对于含于 Δ 的某个圓(內部) S 下式成立：

$$P_{m_0}\cap P\cap S=P\cap S\ \ 或\ \ Q_{n_0}\cap P\cap S=P\cap S.$$

但第二式不得成立。因为这时候，在 S 的內部且属于 Q 的点只有 Q_{n_0} 一点，所以这个点是孤立奇点。今 $f(z)$ 在該点連續，因此 Q_{n_0} 是可去的，即 $f(z)$ 的正則点。旣是这样应有足碼 m_0 及含于 Δ 的圓 S (S 为圓的內部)，使得下式成立：

$$P_{m_0}\cap P\cap S=P\cap S\neq 0.\qquad(12.23)$$

在圓 S 的內部作任意正方形 T，使它的边平行于坐标軸，命正方形的边界为 C，計算积分

$$\int_C f(z)dz.$$

命 T 的边长为 λ，挑选滿足

$$n>2m_0\lambda$$

的任意自然数 n，把 T 的边分成 n 等分，則将 T 分成 n^2 个全同的小正方形。命 T_ν 表示这样的小正方形，C_ν 表示它的周界 ($\nu=1,2,\cdots,n^2$)，則显然

$$\int_C f(z)dz=\sum_{\nu=1}^{n^2}\int_{C_\nu}f(z)dz.\qquad(12.24)$$

今将小正方形分为两类。

第 1 种　內部含 P 点的 T_ν.

第 2 种　內部不含 P 点的 T_ν.

对于第 2 种，由 Cauchy 的基本定理，有

$$\int_{C_\nu}f(z)dz=0.\qquad(12.25)$$

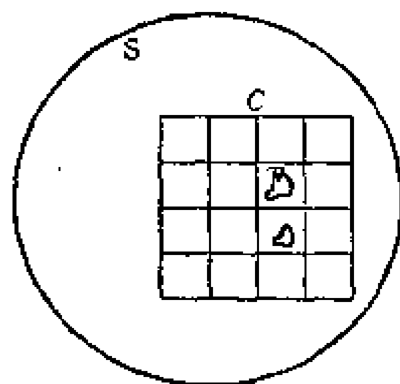


圖 12.4

其次,考察第1种 T_ν。命 $\overline{T}_\nu=T_\nu\cup C_\nu$,

$$\mathfrak{F}=P_{m_0}\cap P\cap\overline{T}_\nu. \tag{12.26}$$

$P_{m_0}\cap P$ 是閉于 Δ 的集,$\overline{T}_\nu$ 含于 Δ,故 $\mathfrak{F}$ 为閉集。命含 $\mathfrak{F}$ 且边平行于軸的最小矩形为 T'_ν,且 T'_ν 的四个頂点为 (x_1, y_1),(x_2, y_1),(x_2, y_2),(x_1, y_2),T'_ν 的周界为 C'_ν。T_ν 及 T'_ν 之間的部分沒有 Q 的点,由 Cauchy 基本定理,有

$$\int_{C_\nu} f(z)\,dz=\int_{C'_\nu} f(z)\,dz. \tag{12.27}$$

今把(12.27)的右端改成綫积分,命

$$z=x+iy,\quad f(z)=u(x, y)+iv(x, y)=u+iv,$$

則

$$\int_{C'_\nu} f(z)\,dz=\int_{C'_\nu}(u+iv)\,(dx+i\,dy)$$

$$=\int_{C'_\nu}(u\,dx-v\,dy)+i\int_{C'_\nu}(v\,dx+u\,dy).$$

分别計算右端的四項。首先,在第一項,C'_ν 的左右两边平行于 y 軸,故 $dx=0$,因此,显然有

$$\int_{C'_\nu} u\,dx=-\int_{x_1}^{x_2}\{u(x, y_2)-u(x, y_1)\}\,dx. \tag{12.28}$$

設 $(x, y)\in\mathfrak{F}$,則由(12.26)有 $(x, y)\in P_{m_0}$,由于 $P_{m_0}\subseteq A(m_0)\cap B(m_0)$,故 $(x, y)\in A(m_0)\cap B(m_0)$。

另一方面,当 $(x+h, y)\in\overline{T}_\nu$,$(x, y+h)\in\overline{T}_\nu$ 时,$|h|$ 比 T_ν 的一边

$$\frac{\lambda}{n}<\frac{1}{2m_0}$$

为小,故由 $A(m_0)$,$B(m_0)$ 的定义,有

$$|u(x+h, y)-u(x, y)|\leqslant m_0|h|,$$

$$|u(x, y+h)-u(x, y)|\leqslant m_0|h|.$$

命 $w(x, y)=u(x, y)$,$M=m_0$,則 $u(x, y)$ 满足引理的一切假設,

故$\iint\limits_{\mathfrak{F}} u_x dx dy$存在，且命

$$\varepsilon'_\nu = \int_{x_1}^{x_2} \{u(x, y_2) - u(x, y_1)\} dx - \iint\limits_{\mathfrak{F}} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy, \quad (12.29)$$

則由引理有

$$|\varepsilon'_\nu| \leqslant 5m_0 \operatorname{mes}(T_\nu - \mathfrak{F}).$$

由(12.23)及$S \supseteq \overline{T}_\nu$，得出$\mathfrak{F} = P \cap \overline{T}_\nu$。所以上式成

$$|\varepsilon'_\nu| \leqslant 5m_0 \operatorname{mes}\{\overline{T}_\nu - P \cap \overline{T}_\nu\}. \quad (12.30)$$

这样，由(12.29)及(12.28)知道

$$\int_{C'_\nu} u\, dx = -\iint\limits_{\mathfrak{F}} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy - \varepsilon'_\nu, \quad |\varepsilon'_\nu| \leqslant 5m_0 \operatorname{mes}(T_\nu - P \cap T_\nu)$$

$$(12.31)$$

成立。对于其余的三项，完全同样地

$$-\int_{C'_\nu} v\, dy = -\iint\limits_{\mathfrak{F}} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy - \varepsilon^2_\nu, \quad |\varepsilon^2_\nu| \leqslant 5m_0 \operatorname{mes}(T_\nu - P \cap T_\nu)$$

成立。故(12.27)成为

$$\left.\begin{aligned} \int_{C_\nu} f(z) dz = &-\iint\limits_{\mathfrak{F}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy \\ &+ i \iint\limits_{\mathfrak{F}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx dy + \varepsilon_\nu, \\ |\varepsilon_\nu| \leqslant 20m_0 &\operatorname{mes}(T_\nu - P \cap T_\nu). \end{aligned}\right\} \quad (12.32)$$

由定理4假定中的Cauchy-Riemann关系式，二重积分的部分为0，故

$$\left|\int_{C_\nu} f(z) dz\right| \leqslant 20m_0 \operatorname{mes}(T_\nu - P \cap T_\nu).$$

故由(12.24)，用$\sum'$表示对于第一种小正方形的和，則得

$$\left|\int_{C} f(z) dz\right| \leqslant 20m_0 \sum{}' \operatorname{mes}(T_\nu - P \cap T_\nu). \quad (12.33)$$

P 在 C 及其內部是閉集，第一种小正方形面积和当 $n\to\infty$ 时的极限，因之就是 $P\cap T$ 的测度，即

$$\lim_{n\to\infty}\{\sum' \operatorname{mes}(T_\nu - P\cap T_\nu)\}=0.$$

因此(12.24)成为

$$\int_C f(z)\,dz=0.$$

由 Morera 定理知道 $f(z)$ 在 S 到处正則，故(12.23)所說 $P\cap S\neq 0$ 是不合理的。这样就証明了定理 4。

第5章 解析开拓

§13 幂級数

具下列形状的級数

$$P(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots \tag{13.1}$$

叫做**幂級数**。若 $P(z)$ 在 Gauss 平面的一点 $z=z_0$ 收斂，則在满足 $|z|<|z_0|$ 的一切点均收斂，从而，对应一个所謂 $P(z)$ 的**收斂半徑**为 0 或为正的实数 ρ，在以 $z=0$ 为中心、ρ 为半徑的圓内部 $P(z)$ 收斂(参看 §4 的 4))，这个圓叫做 $P(z)$ 的**收斂圓**。

Cauchy 及 Hadamard 給出了由 (13.1) 的系数 c_n 求收斂半徑的方法。

定理 1 幂級数(13.1)的收斂半徑 ρ 及系数 c_n 之間有下列关系：

$$\frac{1}{\rho}=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}. \tag{13.2}$$

这里(13.2)的右端为 0 时設 $\rho=+\infty$，右端为 $+\infty$ 时設 $\rho=0$.

証明 用 λ 表示(13.2)的右端：$\lambda=\varlimsup\sqrt[n]{|c_n|}$. 若有复数 z 满足 $|z|<1/\lambda$，則

$$1>\lambda|z|=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}\,|z|=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_nz^n|}.$$

故对于满足 $1>t>\lambda|z|$ 的任意实数 t，有正整数 $N=N(t)$ 存在，当 $n>N$ 时，有

$$\sqrt[n]{|c_nz^n|}<t,$$

或 $|c_nz^n|<t^n$，从而，級数 $\sum_{n=N}^{\infty}c_nz^n$ (与 $\sum_{n=N}^{\infty}t^n$ 比較，知道)是絕对收斂的。即必須 $\rho\geqslant1/\lambda$.

其次，假定 $|z|>1/\lambda$，同理，

$$1<\lambda|z|=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}\,|z|=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_nz^n|},$$

所以有无穷多个 n 使 $\sqrt[n]{|c_nz^n|}>1$，或 $|c_nz^n|>1$。(13.1) 对于这样的 z 不能收斂，即 $\rho\leqslant 1/\lambda$。

由这个定理可以求出冪級数的收斂半徑。冪級数的最重要性质之一是下列**一致定理**或叫做**未定系数法的原理**。

定理2　若冪級数

$$P_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^1z^n,\quad P_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^2z^n,$$

在收斂于 $z=0$ 的数列 $z_\nu(\nu=1, 2, \cdots)$ 一致，則 $P_1(z)$ 及 $P_2(z)$ 是完全相同的冪級数，即对于所有的 $n(n=0, 1, 2, \cdots)$ 有 $c_n^1=c_n^2$。

証明　在 z_k 两者的值一致，故 $P_1(z)$，$P_2(z)$ 的收斂半徑 ρ_1, ρ_2 同时为正，对于 $|z|<\min(\rho_1, \rho_2)$ 能够作出 $P_1(z)-P_2(z)$。它可以写成 $P_1(z)-P_2(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(c_n^1-c_n^2)z^n$ 的形状，假定有 $c_k^1\neq c_k^2$ 的 k，并命 $c_k^1-c_k^2=c_k$，这些 k 中最小的仍用 k 表示，則

$$P_1(z)-P_2(z)=c_kz^k+c_{k+1}z^{k+1}+\cdots,$$

$$\frac{P_1(z)-P_2(z)}{z^k}=c_k+c_{k+1}z+\cdots,$$

命 $z=z_\nu$，取 $\nu\to\infty$ 的极限，左端是 0，右端是 c_k。即 $c_k=0$，这与 c_k 的定义矛盾。

定理 2 为未定系数法，它的应用很多，作为一个例子，試解反函数的問題。

定理3　命

$$P(z)=c_1z+c_2z^2+\cdots$$

的收斂半徑为 $\rho(\rho>0)$，且 $c_1\neq 0$。于是，有唯一的一个冪級数

$$Q(w)=a_1w+a_2w^2+\cdots,$$

它的收斂半徑 σ 是正数，并且对于满足 $|w|<\sigma$，$|Q(w)|<\rho$ 的 w，有 $P(Q(w))=w$。

證明 首先假定 $Q(w)$ 存在

$$Q(w)=a_1w+a_2w^2+\cdots, \tag{13.3}$$

命它的收斂半徑为 $\sigma'(\sigma'>0)$. 取 σ'' 充分小，当 $|w|<\sigma''$ 时，$|Q(w)|$ 也能够很小，因此可以 $|Q(w)|<\rho$. 对于这样的 w 可以作 $P(Q(w))$，由假定它应当等于 w，即

$$w=c_1(a_1w+a_2w^2+\cdots)+c_2(a_1w+a_2w^2+\cdots)^2+\cdots,$$

右端的各級数絕对收斂，按 Cauchy 乘法定理施行乘法，項的順序也可以变更，因而整理卽得

$$w=c_1a_1w+(c_1a_2+c_2a_1^2)w^2+(c_1a_3+2c_2a_1a_2+c_3a_1^3)w^3+\cdots.$$

引用定理 2，左右两端的系数应当一致，故 $c_1a_1=1$, $c_1a_2+c_2a_1^2=0$, $c_1a_3+2c_2a_1a_2+c_3a_1^3=0$, $\cdots$. 由此可以依次求出 a_n 的值

$$\left.\begin{aligned} a_1&=1/c_1,\\ -a_2&=1/c_1\{a_1^2c_2\},\\ -a_3&=1/c_1\{2c_2a_1a_2+c_3a_1^3\},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{13.4}$$

另一方面，$P(z)$ 的收斂半徑是正的，故由定理 1 有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\lambda<+\infty,$$

卽 $\sqrt[n]{|c_n|}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$ 有界，故有与 n 无关的有窮正数 G 存在，使得

$$\sqrt[n]{|c_n|}<G<+\infty \quad (n=2, 3, \cdots).$$

因此对于 $n=2, 3, \cdots$ 有 $|c_n|<G^n$，对于滿足 $0<R<1/G$ 的 R，有

$$|c_n|<(1/R)^n \quad (n=2, 3, \cdots).$$

回过来看 (13.4) 中 a_n 的值，若 c_1 是正数，c_2 以下全部是負数，則 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 都是正的，并且当 c_1 固定时，則 $c_2, c_3, \cdots$ 的絕对值愈大，$a_2, a_3, \cdots$ 也愈大。因之，命

$$w=|c_1|z-\frac{1}{R^2}z^2-\frac{1}{R^3}z^3-\cdots,$$

即

$$w=|c_1|z-\frac{z^2}{R(R-z)}, \tag{13.5}$$

则由此所作的反函数的展开式应当是 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n||w|^n$ 的优級数。解(13.5)有

$$(1+R|c_1|)z^2-R(R|c_1|+w)z+R^2w=0,$$

$$z=\frac{w+|c_1|R\pm\sqrt{w^2-2(|c_1|R+2)w+|c_1|^2R^2}}{2(1+R|c_1|)}R$$

(其中 $\pm\sqrt{\quad}$ 应当挑选使得当 $w=0$ 时 $z=0$)。

故优級数的收斂半徑是置 $\sqrt{\quad}$ 內的值等于0时，w 两根中較小的一个，即

$$w_1=R|c_1|+2-2\sqrt{R|c_1|+1}>0.$$

亦即由(13.4)所决定的幂級数(13.3)至少有等于 w_1 的收斂半徑，对于滿足 $|w|<w_1$ 的 w 絕对收斂，只要 $|Q(w)|<\rho$ 直接代入应当有

$$P(Q(w))=w.$$

这样就証明了定理3。

以上考察了以原点为中心的幂級数，以 Gauss 平面任一点 a 为中心的幂級数

$$P(z,a)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots$$

也是一样的。

最后，可以将

$$P(z,\infty)=c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots \tag{13.6}$$

看作是以 $z=\infty$ 为中心的幂級数，c_0 是在中心的值，这个級数如有收斂点，将在以原点为中心的某个圓 $|z|=r$ 外收斂。这仍然是以 ∞ 为中心的收斂圓，称 $|z|>r$ 的部分为收斂圓的內部。

§ 14 解析开拓原理

1) **直接开拓** 命 a, b 为复数球面的两点，各以 a, b 为中心的冪級数 $P(z, a)$, $P(z, b)$ 的收斂圓 $C(a)$, $C(b)$ 的內部有公共点，在公共点的所有点两級数都取相同的数值时，叫做 $P(z, a)$ 及 $P(z, b)$ 是另一个的**直接开拓** (Direct prolongation)。

定理 1 具直接开拓关系的两个冪級数，若其中的一个及另一个的中心是給定的，則另一个級数唯一确定。

証明 今命 $P(z, a)$, $P(z, b)$ 为具直接开拓关系的两个冪級数，且 $P(z, a)$ 及 b 是給定的。今証明以 b 为中心的冪級数 $Q(z, b)$，如果它与 $P(z, a)$ 有直接开拓的关系，則必为 $P(z, b)$. 为簡便起見不妨設 b 是有穷数。由 $P(z, a)$ 及 $Q(z, b)$ 的收斂半徑 r_1, r_2 作 $r=\min(r_1, r_2)$，在 $|z-b|<r$ 內 $P(z, b)-Q(z, b)=T(z, b)$ 是单值正則函数。由題設在这个圓某一內点的邻域 $T(z, b)$ 恒等于 0。今在圓 $|z-b|<r$ 內，命 G 表示 $T(z, b)$ 为 0 的点集內部，若 p 为 G 的一个边界点，假定 p 在圓 $|z-b|<r$ 的內部，則

$$\frac{d^nT(z, b)}{dz^n} \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

在 G 內全部恒为 0，且在 p 处由于它是連續，故这些微商在点 p 也等于 0. 另一方面，$T(z, b)$ 可以点 p 为中心展成 Taylor 級数 (参看 § 10 的 1))，而級数的系数全为零，故 p 必为 G 的点。即圓 $|z-b|<r$ 必与 G 一致。这样，$T(z, b)$ 在 b 的邻域恒等于零，由一致定理知 $P(z, b)$ 与 $Q(z, b)$ 表示同一个冪級数。

直接开拓原則上由点 b 唯一确定，至于实际計算时，則首先把中心自点 a 移到綫段 a, b 上在 $P(z, a)$ 收斂圓內的某一点 a_1，这样反复作有穷次即可达到 b. 这时候，$P(z, a_1)$ 可以直接应用 $P(z, a)$ 的值，由下列公式給出：

$$P(z, a_1) = P(a_1, a) + P'_z(a_1, a)(z-a_1) + P''_z(a_1, a)\frac{(z-a_1)^2}{2!} + \cdots. \qquad (14.1)$$

2) **解析开拓** 中心有穷，收斂半徑大于0的幂級数，及中心是∞半徑有穷的幂級数叫做**函数元素** (function element)，幂級数的中心叫做元素的中心。函数元素的全体可以按照下列方法分类。今取$n+1$个函数元素

$$P(z, a_0), P(z, a_1), \cdots, P(z, a_n) \quad (n=1, 2, \cdots),$$

对于$i=1, 2, \cdots, n$的全体的i, $P(z, a_{i-1})$与$P(z, a_i)$互相是直接开拓的时候，则称$P(z, a_0)$与$P(z, a_n)$有**解析开拓**的关系。由定义显然知道，如$P(z, a)$与$P(z, b)$, $P(z, b)$与$P(z, c)$各有解析开拓的关系，则$P(z, a)$与$P(z, c)$也有解析开拓的关系。这样函数元素的全体可以分成彼此沒有公共元素的类。給定一个函数元素$P(z, a)$，与$P(z, a)$有解析开拓关系的函数元素的全体即为由$P(z, a)$确定的类。这样的类，依照 Weierstrass，叫做**解析函数**。

給定一个函数元素$P(z, a)$，以之为元素的解析函数唯一确定。但是即使$P(z, b)$为$P(z, a)$的解析开拓，虽給定$P(z, a)$及b, $P(z, b)$却未必确定。这一点是和直接开拓有很大差异的。为了明确这一点，命$a=a_0$, $a_n=b$，作函数元素解

$$P(z, a_0), P(z, a_1), \cdots, P(z, a_n),$$

这里$P(z, a_{i-1})$与$P(z, a_i)$都有彼此直接开拓的关系。由定理1，給定$a_1, a_2, \cdots, a_n$，则可以决定$P(z, a_n)=P(z, b)$。又在两个$P(z, a_{i-1})$, $P(z, a_i)$之間，任取綫段a_{i-1}, a_i上的一点c，由于c在$P(z, a_{i-1})$或$P(z, a_i)$的收斂圓内，故把圓的中心移到c后，則得出幂級数$P(z, c)$, $P(z, c)$和$P(z, a_{i-1})$及$P(z, a_i)$都有直接开拓的关系。

因此，将$(n+1)$个点$a=a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$依次用綫段（或大

圆弧)联結之,即得出折綫 C.

以 C 上的各点 ζ 为中心的函数元素

$$P(z, \zeta), \quad \zeta\in C$$

在 ζ 有邻域 $V(\zeta)$,任意两点 $\zeta_1, \zeta_2\in V(\zeta)\cap C$ 所对应的 $P(z, \zeta_1)$, $P(z, \zeta_2)$ 能够彼此直接开拓。一般地不限定折綫,給定某一曲綫 Γ, $z=z(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, Γ 是連結两点 $a=z(0)$, $b=z(1)$ 的曲綫,若对于 $\zeta\in\Gamma$ 的所有点 ζ 选取函数元素

$$P(z, \zeta), \quad \zeta\in\Gamma,$$

且有邻域 $V(\zeta)$,任意两点 $\zeta_1, \zeta_2\in V(\zeta)\cap\Gamma$ 所对应的 $P(z, \zeta_1)$ 及 $P(z, \zeta_2)$ 彼此为直接开拓时,則 $P(z, b)$ 由 $P(z, a)$ 及曲綫 Γ 决定。这一事实,叫做 $P(z, b)$ 为由 $P(z, a)$ 出发,**沿曲綫 Γ 解析开拓**所得的函数元素。

若应用这样的术語,則 $P(z, b)$ 为由 $P(z, a)$ 出发沿上述的折綫 C 解析开拓所得的函数元素,但是反轉来却不成立。即給定 $P(z, a)$ 及 $P(z, b)$ 时,由 $P(z, a)$ 出发实行解析开拓能得到 $P(z,b)$ 所沿的 C 有无穷多个。其中沿怎样的曲綫才能給出同一的 $P(z,b)$,这是下面要討論的。

今考察由 a 出发到 b 的两条曲綫 γ_1, γ_2,分别由参数方程

$$\gamma_1:\quad z=z_0(t);\quad \gamma_2:\quad z=z_1(t)\quad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

給出。并設有依賴于另一个参变数 $u(0\leqslant u\leqslant 1)$ 的曲綫族,满足下列四条件:

1. 对于一切 $u(0\leqslant u\leqslant 1)$, $z(0, u)=a$, $z(1, u)=b$.

2. $z(t, 0)=z_0(t)$ 即 γ_1, $z(t, 1)=z_1(t)$ 即 γ_2.

3. 对于满足 $0\leqslant u_0\leqslant 1$ 的一切 u_0,給定的解析函数 f 的 $P(z,a)$ 能由 a 出发沿曲綫 $z(t, u_0)$ 解析开拓到 b.

4. $z(t, u)$ 为在 $0\leqslant t\leqslant 1$, $0\leqslant u\leqslant 1$ 的两实变数(复值)的連續函数。

这时候,称 γ_1 与 γ_2 为关于 f 及 $P(z,a)$ **經連續形变**(continuous deformation) 可以互相轉移的曲綫。沿着这样的曲綫 γ_1, γ_2, 由 a 出发将 $P(z, a)$ 解析开拓到 b, 应当得出相同的 $P(z, b)$。这是因为将上述自曲綫 C 移到曲綫 C' 的操作反复作有穷次,就能够由 γ_1 移到 γ_2。这样,就証明了下列定理。

定理 2 若由点 a 出发到 b 止的两条曲綫 γ_1, γ_2, 对于解析函数 f 及其函数元素 $P(z, a)$ 能够連續形变,则 $P(z, a)$ 由 a 出发沿 γ_1, γ_2 解析开拓到 b 所得的函数元素相同。

这样的两曲綫 γ_1, γ_2, 叫作对于解析函数 f **同倫**(homotopy)的。

給定了一个解析函数 $f(z)$ 和它的一个函数元素 $P(z,a)$,以及含 a 的域 D,沿 D 内的折綫实行解析开拓所得的函数元素的全体,叫做 $P(z, a)$ 及 D 所确定的 $f(z)$ 的**分支**。由定理 2 立刻得出下列的系。

系 由解析函数 $f(z)$ 的元素 $P(z, a)$ 在含 a 的单連通域 D 内,把 $P(z, a)$ 由 a 出发,沿 D 内的任一折綫如果能作解析开拓,则由 $P(z, a)$ 及 D 所确定的 $f(z)$ 的分支为单值的。

这叫做**单值性定理**(monodromy theorem)。

沿自点 a 出发到 b 的两折綫 γ_1, γ_2, 若对于 $f(z)$ 不是同倫的情形,则解析函数 $f(z)$ 在 $z=b$ 自然可以是多值的,关于这一点,有下列著名的 Poincaré-Volterra 定理。

定理 3 解析函数 $f(z)$ 在同一点 z_0 取值的集至多为可数集。

証明 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 取的值都是 $f(z)$ 以 z_0 为中心的函数元素在 $z=z_0$ 的值,命其中的一个值为 w_0,給出这个値的一个函数元素中命其为 $P(z, z_0)$, 固定之,其他的一切值 $w=f(z_0)$ 可沿自 z_0 出发又回至 z_0 的某一閉折綫 C, 把 $f(z)$ 从 $P(z, z_0)$ 作解析开拓而得到。今命 C 的顶点为

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_{n-1},\ z_n=z_0, \tag{14.2}$$

由 $P(z,z_0)$开始作解析开拓,依次得出函数元素 $P(z,z_1)$, $P(z,z_2)$, $\cdots$, $P(z,z_{n-1})$, $P_1(z,z_0)$, 其中 $P(z,z_{j-1})$ 及 $P(z,z_j)$彼此为直接开拓,其次由于 C 上的顶点可以增加,故不失普遍性可以使z_j ($j=1, 2, \cdots, n$) 在 $P(z,z_{j-1})$ 的收斂圆内部 (参看§14 的1))。今另选 $n-1$ 个点 $z'_j=x'_j+iy'_j$ 充分接近 z_j, 且 x'_j, y'_j 都是有理数 (这样的点叫做**有理点**),并且能够使(14.2)及

$$z_0,\ z'_1,\ z'_2,\ \cdots,\ z'_{n-1},\ z'_n=z_0 \tag{14.3}$$

所确定的折綫关于$f(z)$ 彼此为同倫。例如假定 z_1 不是有理点,而 z'_1 是 $P(z,z_1)$收斂圆内的任意有理点,则变更后的折綫 $z_0z'_1z_2$ 与折綫$z_0z_1z_2$ 为同倫,又这一 z'_1 可充分接近 z_1, 使 z_2 能在 $P(z,z'_1)$的收斂圆内,这样就能够依次把不是有理点的顶点换成有理点。

因此不失普遍性,一开始就可以将 $n-1$ 个点 $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}$ 认为是有理点。

这样的折綫为 z_0 及 Gauss 平面上的有穷个有理点的特殊組合所确定,它的个数不超过 $(\aleph_0)^n$ 对于 $n=1, 2, \cdots$ 的和。由于 $(\aleph_0)^n=\aleph_0$, $\aleph_0+\aleph_0+\cdots=(\aleph_0)^2=\aleph_0$, 故 $w=f(z_0)$不同的值至多是可数的。

3) **奇点**　解析函数 $f(z)$的一个函数元素 $P(z,a)$, 联結点 a 及 b 的曲綫

$$\Gamma: z=z(t) \quad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

均为給定,任給滿足 $0<t_1<1$ 的 t_1, 命 Γ 对于 $0\leqslant t\leqslant t_1$ 的弧为 $\Gamma(t_1)$,若 $P(z,a)$对于上述所有的 t_1,沿弧 $\Gamma(t_1)$到 $z(t_1)$作解析开拓虽是可能的,但当沿 Γ 到 b 却不能够作解析开拓时,则称$f(z)$在 b 有 **$P(z,a)$及 Γ 所确定的奇点**。

由这个定义,$P(z,a)$及Γ 虽然确定了奇点,但如命 Γ_1, Γ_2 为連結 a, b 的曲綫,它們都与 $P(z,a)$共同决定奇点的时候,这些奇

点是否可以看做是同一个，一般情形是很困难的問題。例如下述情况发生的时候，只看作是一个奇点应当是可以的。即作以 b 为中心、半徑为 ρ 的圓(或球帽)时，命 a 在这个圓内，只要連 a,b 的曲綫也在这个圓内，$P(z, a)$ 沿着这一曲綫到 b 的附近虽然能够解析开拓，但假定沿一条适当的曲綫却不能解析开拓到 b 点。这时候，沿其他一切这样的曲綫也必然不能解析开拓到 b。称这样的 b 为只由 $f(z)$ 的 $P(z, a)$ 确定的**孤立奇点**。

这时候，把圓心去掉的(复連通)域叫作 D_ρ，可以考虑 $f(z)$ 在 D_ρ 上由 $P(z, a)$ 所确定的分支。

例如，函数 $w=\log z$ 在 $z=0$ 及 $z=\infty$ 有孤立奇点。这时 ρ 可以是任意的正数，$\log z$ 在 D_ρ 的分支，不論 $b=0$ 或 $b=\infty$ 都只有一个，而都是无穷多值。

今假定 $f(z)$ 在 D_ρ 上由 $P(z, a)$ 所确定的分支为有穷多值，这一有穷的数由定理 2 显然知道与 D_ρ 的点无关。姑且設个数是 m，且 $m>1$ 的情形。在 a 属于这个分支的函数元素是

$$P_1(z, a),\ P_2(z, a),\ \cdots,\ P_m(z, a),$$

共 m 个。今就由 a 出发反时針方向繞 b 一周回到 a 的簡单曲綫，例如考察

$$(\Gamma) \qquad z(t)=b+(a-b)e^{i2\pi t},$$

这样繞一周后 $P_1(z, a)$ 移到另一个 $P_{j_1}(z, a)$. 再在同一曲綫上旋轉一周后移到 $P_{j_2}(z, a)$. 继續旋轉 $m-1$ 周，得出下列函数元素列：

$$P_1(z, a),\ P_{j_1}(z, a),\ P_{j_2}(z, a),\ \cdots,\ P_{j_{m-1}}(z, a),$$

其中沒有两个相同。因为假定有相同的，則以后不論再旋轉多少周，只在 ($P_1(z, a)$ 与第一个与它相同的 $P_{j'}(z, a)$ 以前的) 之間变动，而其余的不得属于这一分支。因此，可以不失普遍性，命

$$j_k=k+1 \quad (k=1, 2, \cdots, m-1).$$

另一方面，用复变数 t，作

$$z=b+t^m.$$

取 $t^m=a-b$ 的一个根为 t_1，命 $z=a$ 与 t_1 对应，若

$$z-b=t^m,\quad z-b=re^{i\theta},\quad t=Re^{i\Theta},$$

则 $$r=R^m,\ \theta=m\Theta+2\nu\pi\quad(\nu=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

当 z 在 Γ 上右旋一周时，t 在圓周 $|t|=r^{1/m}$ 上移动圓周角 $2\pi/m$，故 z 在 Γ 旋轉 m 周时，t 在它的圓周上旋轉一周。从而

$$P_1(z,\ a)=P_1(b+t^m,\ a)=Q(t)$$

在 D_r 是**单值正則**函数，故在 D_r 上能展成 Laurent 級数

$$Q(t)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}c_\nu t^\nu\quad(0<|t|<\rho^{\frac{1}{m}}).\tag{14.4}$$

这个展开式至多具极点，換句話說，(14.4)的主要部分是有穷项数时，則 $z=a$ 叫做 $P(z,\ a)$ 的 **m 阶代数奇点**，或叫做**代数支点**。在(14.4)中，命 $t=(z-b)^{1/m}$，則

$$f(z)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}c_\nu(z-b)^{\nu/m}\tag{14.5}$$

叫做 **Puiseux 展开式**。

又(14.4)表示极点的时候，考慮 $1/Q(t)$，这是在 $t=0$ 处等于 0 的函数，命

$$R(t)=\begin{cases}1/Q(t), & t=0\text{ 是 }Q(t)\text{的极点时},\\ Q(t)-c_0, & t=0\text{ 不是 }Q(t)\text{的极点时},\end{cases}$$

則上述結果可以总括写成

$$\left.\begin{aligned}&z-b=t^\mu,\\ &R=b_\nu t^\nu+b_{\nu+1}t^{\nu+1}+\cdots\quad(b_\nu\neq0),\end{aligned}\right\}\tag{14.6}$$

其中 μ, ν 均为自然数。这样的 t 叫做**局部单值化参数** (locally uniformizing parameter)。

簡单閉曲綫 Γ 包圍的有界单連通域 D 中任取曲綫，如果解析函数 $f(z)$ 能沿之解析开拓，則由单值性定理知 $f(z)$ 在 D 的分支是

单值的。这时若 Γ 的所有点都是这个分支的奇点，这个分支应与 $f(z)$ 一致。这时 Γ 叫做 $f(z)$ 的**自然边界**。例如

$$P(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n!}, \qquad (14.7)$$

根据定理 1(§ 13)，它的收敛半径为 1，故在收敛圆周上至少有一个奇点。因此命 $P_m(z)=\sum_{n=1}^{m}z^{n!}$，则

$$R_m(z)=P(z)-P_m(z)=\sum_{n=m+1}^{\infty}z^{n!}$$

与 $P(z)$ 有相同的奇点。若 $P(z)$ 沿半径 $z(t)=te^{i\theta_0}$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 能够解析开拓到点 $e^{i\theta_0}$，则有数 $\delta>0$，使在满足 $|\theta-\theta_0|<\delta$ 的各点 $e^{i\theta}$ 也能够解析开拓。从而对于 $R_m(z)$ 也应成立同样的事实。另一方面，对于 $m\delta>2$ 的 m，等式

$$R_m(z)=R_m(ze^{2\pi j/m}) \quad (j=0,1,2,\cdots,m-1)$$

成立，因此 $R_m(z)$ 在 $|z|=1$ 上的任何点都没有奇点，这是不合理的。即(14.7)以 $|z|=1$ 为自然边界。

§ 15 Riemann 面

1) **解析图形**(analytische Gebilde) $f(z)$ 为 Weierstrass 意义的解析函数时，考虑 z 沿着 Gauss 平面或复数球面的曲綫作解析开拓，自然可以当作 z 的函数处理，但一般地不是单值函数。纵然是多值解析函数，而考虑 z 在某种面上移动时，却是单值函数。为了这个目的，Riemann 于 1857 年导入了所謂 **Riemann 面**的概念。根据 1913 年 Weyl 的著作“Die Idee der Riemannschen Fläche”，为了叙述它的定义，先从解析图形概念說起。

在前节中 (参看 (14.4) 及(14.6))，已經应用輔助复变数 t 討論了解析函数 $f(z)$ 在极点或正则点 z，或稍一般地在孤立奇点的邻域为有穷多个值的情形，即把 $f(z)$ 展成

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll}z=b+t^m & (b\text{ 为有穷的情形})\\ \text{或}\quad t^{-m} & (b=\infty\text{ 的情形})\end{array}\right\}(m=1,2,3,\cdots),\\ w=f(z)=c_0+b_\nu t^\nu+b_{\nu+1}t^{\nu+1}+\cdots\quad(b_\nu\neq0),\\ \text{或}\qquad =b_{-\mu}t^{-\mu}+b_{-\mu+1}t^{-\mu+1}+\cdots\quad(b_{-\mu}\neq0)\\ \qquad(\mu,\nu=1,2,3,\cdots),\end{array}\right\}\quad(15.1)$$

一般地,展开式

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll}P(t)=a_0+a_mt^m+a_{m+1}t^{m+1}+\cdots & (m>0)\\ \text{或}\qquad a_mt^m+a_{m+1}t^{m+1}+\cdots & (m<0)\end{array}\right\}(a_m\neq0),\\ \left.\begin{array}{ll}Q(t)=b_0+b_nt^n+\cdots & (n>0)\\ \text{或}\qquad b_nt^n+\cdots & (n<0)\end{array}\right\}(b_n\neq0)\\ \qquad(m,n=1,2,3,\cdots)\end{array}\right\}\quad(15.2)$$

在 $|t|<\varepsilon(\varepsilon>0)$ 收斂，并且对于两个 t,t' 只要 $t\neq t'$，则 $P(t)\neq P(t')$ 或 $Q(t)\neq Q(t')$ 成立。这样的函数組 $\{P(t),Q(t)\}$ 叫做**广义函数元素**。給定了两組广义函数元素

$$\{P(t),Q(t)\},\quad\{P_1(\tau),Q_1(\tau)\},\qquad(15.3)$$

两者之間用在 $|t|<\delta(\delta>0)$ 收斂的冪級数

$$\tau=c_1t+c_2t^2+\cdots\quad(c_1\neq0)$$

在 $|t|<\delta_1(\delta_1>0)$

$$P_1(\tau(t))\equiv P(t),\quad Q_1(\tau(t))\equiv Q(t)$$

成立时,叫做 (15.3) 为**同一函数元素**用不同参变数 t,τ 的表示。

特别具(15.1)形状时，称表示为标准形，此时当 $m=1,n>0$ 时,叫做**正則的函数元素**, $m>1$ 时这一函数元素具 $(m-1)$ **級的分歧**, $m=1$ 时为**不分歧**，两者都把 a_0 叫做函数元素的中心。$m<0$ 时,称函数元素的中心为 $z=\infty$，具 $(m-1)$ 級的分歧。

在这样定义的函数元素全体定义邻域組如下，則可以看做是拓扑空間。即給定了一个函数元素 $e=\{P(t),Q(t)\}$，置 $\varepsilon=\min(\delta,\delta_1)$，則 $\varepsilon>0$. 对于滿足

$$|t|<\varepsilon_1,\quad 0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon$$

的任意复数t,在$|\tau|<\varepsilon_1-|t|=\varepsilon_2$展成$\tau$的正負項幂級数

$$\left.\begin{aligned}P_t(\tau)=P(t+\tau)=\sum_{k=m'}^{\infty}a_k'\tau^k,\\ Q_t(\tau)=Q(t+\tau)=\sum_{k=n'}^{\infty}b_k'\tau^k\end{aligned}\right\}\qquad(15.4)$$

給出了函数元素$e_t=\{P_t(\tau),\ Q_t(\tau)\}$。因此定义这样的函数元素全体构成$e$的邻域$V_{\varepsilon_1}(e)$。命函数元素全体为$E$,在$E$就这样引进了拓扑。关于这个拓扑$E$成 Hausdorff 空間，卽对于$E$下列(A)，(B)，(C)，(D)四个命題成立。

(A) 对于一切函数元素e至少有一个$V_\varepsilon(e)$存在,且$e\in V_\varepsilon(e)$。

因为任取满足$0<\varepsilon<\min(\delta,\ \delta_1)$的$\varepsilon$，則$V_\varepsilon(e)$存在，显然知道$e\in V_\varepsilon(e)$。

(B) 对于e的两个邻域$V_\varepsilon(e)$，$V_{\varepsilon'}(e)$有第三个邻域$V_{\varepsilon''}(e)$存在,满足$V_{\varepsilon''}(e)\subseteq V_\varepsilon(e)\cap V_{\varepsilon'}(e)$。

因为适当改变ε，ε'，不失普遍性可設$V_\varepsilon(e)$与$V_{\varepsilon'}(e)$是用同一个参变数表示的。命$\varepsilon''=\min(\varepsilon,\ \varepsilon')$卽可。

(C) 当$e'\in V_\varepsilon(e)$时,有$V_{\varepsilon'}(e')$满足$V_{\varepsilon'}(e')\subseteq V_\varepsilon(e)$。

因为$e'\in V_\varepsilon(e)$，故有满足$|t'|<\varepsilon$的t'存在，使e'表示为$P_{t'}(\tau)=P(t'+\tau)$，$Q_{t'}(\tau)=Q(t'+\tau)$。命$\varepsilon'=\varepsilon-|t'|$，则

$$V_{\varepsilon'}(e')\subseteq V_\varepsilon(e).$$

(D) 对于任意两个不相同的函数元素$e=\{P,\ Q\}$，$e_1=\{P_1,\ Q_1\}$，它們各有邻域$V_\varepsilon(e)$，$V_{\varepsilon'}(e_1)$存在使得彼此为互斥：

$$V_\varepsilon(e)\cap V_{\varepsilon_1}(e_1)=0.$$

假定$\{P(t),\ Q(t)\}$表示$V_\varepsilon(e)$，$\{P_1(\tau),Q_1(\tau)\}$表示$V_\varepsilon(e_1)$，更对于任意的$\varepsilon=\varepsilon_1=\dfrac{1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，假定有满足$e^{(n)}\in V_\varepsilon(e)\cap V_\varepsilon(e_1)$的函数元素$e^{(n)}$，則有值$\{t_n\}$，$\{\tau_n\}$存在，因为在$e_{t_n}$，$e_{\tau_n}$

的中心附近它們的值相等，故有

$$P(t_n')=P_1(\tau_n'),\quad Q(t_n')=Q_1(\tau_n'),$$

$$0\leqslant|t_n|<|t_n'|<\frac{1}{n},\quad 0\leqslant|\tau_n|<|\tau_n'|<\frac{1}{n}.$$

即这些正負項的幂級数 $\{P(t),Q(t)\}$，$\{P_1(t),Q_1(t)\}$ 彼此完全一致，这是不合理的。

由以上所述知函数元素全体 E 构成 Hausdorff 空間。因为任意的 Hausdorff 空間可以分解成連通成分，故对于各函数元素 e 有由 e 决定的 E 的成分 $\mathfrak{F}(e)$。这个 $\mathfrak{F}(e)$ 叫做含 e 并且由 e 决定的**解析图形**。簡单地說，在 Weierstrass 的解析函数概念又加添了极点及代数支点。

2) **Riemann 面** 一般的 Riemann 面可定义如下。

定义 有連通的 Hausdorff 空間 R，在 R 内有开集 U 的組 $\{U\}$，$\cup\{U\}=R$，且对于各个 U，有到 Gauss 平面单位圓：$|z|<1$ 上的拓扑变換（一对一双方連續变換）$z=\alpha(p)$，$p\in U$ 滿足

(N) U，U' 为上述的两个开集，若 $U\cap U'$ 不是空的，$U\cap U'$ 应由 U，U' 的拓扑变換 $z=\alpha(p)$，$z'=\alpha'(p)$ 映射到单位圓内两个开集 G，G'，$\alpha'\{\alpha^{-1}(p)\}$ 是由 G 至 G' 的（正向）共形（一对一）变換

的时候，R 就叫做 Riemann 面。

这一定义中的 $z=\alpha(p)$ 叫做**局部单值化参数**(local parameter)。

由这定义，Riemann 面上任意的域自己显然可以看作是 Riemann 面。

今命 R，R' 为两个 Riemann 面，且由变换 $p'=\varphi(p)$，$p\in R$，将 R 一对一地映射至 R' 上，R' 的局部参数 $z'=\alpha'(p')$ 經 $z=\alpha'\{\varphi(p)\}$ 給出 R 的局部参数时，叫做 φ 把 R 共形地映射到 R'。共形映射的 Riemann 面构成一个类，換句話說，如用符号 $R\sim R'$

表示将 R 共形映射至 R' 上，则～满足分类的三公理：(1) $R\sim R$，(2) 若$R\sim R'$，则 $R'\sim R$，(3)若 $R\sim R'$，$R'\sim R''$，则 $R\sim R''$。

彼此共形的 Riemann 面叫做"共形等价 (conformally equivalent)"，这可以看做是同一 Riemann 面的两个**实现**(realization)。

命 R 是一个 Riemann 面，$w=f(p)$，$p\in R$ 为定义在R (或一般地定义在 R 的某一个域)上的单值复变函数，由 R 的局部参数 $z=\alpha(p)$ 作

$$g(z)=f\{\alpha^{-1}(z)\},$$

若它在 $|z|<1$ 內正则，则称$\boldsymbol{f(p)}$**在** $\boldsymbol{p}$ **正则**；$g(z)$ 在 $z=0$ 具极点时，称$f(p)$在 p 具**极点**。不管那一种情形都能展成 Laurent 級数

$$g(z)=c_0+c_m z^m+\cdots\quad(c_m\neq 0),\qquad(15.5)$$

但 c_0 的值与m却与局部参数的取法无关 (必須注意按上述等价意义，局部参数取法是有无穷多种的)。当 $m>0$ 时，m 叫做$f(p)=c_0$ 的級(order)。当 $m<0$ 时，$-m$ 叫做$f(p)$的**极的級**。对于R上所有的点 p 能够展成(15.5)的形状时，叫做$f(p)$ 半純(或作有理型，meromorphic)于 R。

"給定一个解析函数 $w=f(z)$，它的解析图形是 Riemann 面"。事实上，$f(z)$的解析图形的各点 p 对应函数元素 e 。取与 p 对应的一个函数元素，变换这时应用的参数 t 为 $t'=\dfrac{t}{\varepsilon}$，则解析图形上的邻域 $V_\varepsilon(e)$是$|t'|<1$ 的一对一两連續象。不难証明，这个对应满足条件(N)。

更有趣的是，反过来任意給定一个 Riemann 面时，有半純于 R 的两个函数

$$z=z(p),\quad w=w(p),$$

滿足下列三条件。第一，对于滿足 $p\in R$ 的一切点，由局部参数 $t=\alpha(p)$

$$z=z\{\alpha^{-1}(t)\}=P(t),\quad w=w\{\alpha^{-1}(t)\}=Q(t)$$

可展成(15.1),(15.2)的形式,且 $t\neq t'$ 时 $\{P(t), Q(t)\}\neq\{P(t'), Q(t')\}$,从而这样的 $z(p)$, $w(p)$ 可以看作是一个函数元素(按§15的1)的意义)。第二,这样所得的任意两个函数元素 $\{z(p_1), w(p_1)\}$, $\{z(p_2), w(p_2)\}$ 之間能够由一方解析开拓到另一方,从而得出由 R 到解析图形 $\{z(p), w(p)\}$ 的单值对应。第三,这个对应是 R 到解析图形之間的一一对应。

根据这一結果,Riemann 面按某种意义可以看作和解析图形是同样的。这里只叙述結果,証明从略。

3) **Riemann 面的例** 为了考察 Riemann 面上支点的状况,試作幂根函数

$$w=\sqrt[n]{z}\quad(n=2, 3, \cdots)$$

的 Riemann 面。显然可取参数

$$z=t^n,\quad w=t,$$

例如在 $|t|<2$ 及 $|t|>\dfrac{1}{2}$ 处分别作出以 $t=0$ 及 $t=\infty$ 为中心的展开。另一方面,命 $z=re^{i\theta}(0\leqslant\theta<2\pi)$, $\sqrt[n]{z}$ 为 n 值函数,它的值是 $w_\nu=(r)^{\frac{1}{n}}e^{i\Theta_\nu}$, $\Theta_\nu=\dfrac{\theta}{n}+\dfrac{2\pi\nu}{n}$ $(\nu=0, 1, \cdots, n-1)$.

今取 n 个 Gauss 平面 $z_1, z_2, \cdots, z_n$,在每張上边各以原点为中心、2^n 为半徑作出圆盘 $(z_1), (z_2), \cdots, (z_n)$;再以原点为中心、$\dfrac{1}{2^n}$ 为半徑作圆盘,命在这样的圆盘以外,而在 2^n 为半徑的圆盘内的部分为 $(z'_1), (z'_2), \cdots, (z'_n)$.各由 $z=0$ 起沿正实軸剪开,把 (z_i), (z'_i) $(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 的切口上侧和 (z_{i+1}), (z'_{i+1}) 切口下側衔接起来,将 (z_n), (z'_n) 的切口上側与 (z_1), (z'_1) 切口下側衔接起来,最后把 (z_i) 及 (z'_i) 相重的部分一致起来,这样就得出一个面。这就是 $w=\sqrt[n]{z}$ 的 Riemann 面,命面 z_ν 上的

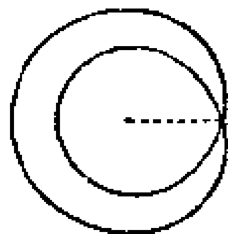


图 15.1

点与 w_ν 对应，则 $\sqrt[n]{z}$ 在这一面上为单值。

这时，$z=0$ 及 $z=\infty$ 是 Riemann 面的支点。由上述 Riemann 面的定义，作为 Riemann 面内点出现的支点，都是代数支点，其他（例如对数）的支点，应注意不是内点。

第6章　共形映射

§16　Dirichlet 問題

我們已經在 §9 的 4) 內談到了 Dirichlet 問題，域是圓的情形，Poisson 积分就給出了解答。今介紹 O. Perron 于 1923 年所給的一般情形的解法。为此先从次調和函数的定义开始。

1) **次調和函数**　命 $u(x, y)$ 表示 Gauss 平面域 D 內的調和函数，直到关于 x, y 的二阶偏微商都是連續的，$p=a+ib$ 是 D 的一点，以 p 为中心、$r\,(r>0)$ 为半徑的圓完全含于 D 內，則由 Poisson 积分有

$$u(a, b)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+r\cos\theta,\ b+r\sin\theta)\,d\theta, \qquad (16.1)$$

卽調和函数在圓心的值等于圓周上值的平均。(16.1) 叫做 Gauss 的**平均值等式**。把調和函数推广到其他便于使用的族时就利用这一等式。卽定义在域 D 上 (允許 $-\infty$) 的实值函数 $u(p)$，$p\in D$，滿足下列三条件时叫做在 D 的**次調和函数** (subharmonic function)。

(1)　$u(p)$ 滿足 $-\infty\leqslant u(p)<\infty$，且不恒等于 $-\infty$。

(2)　$u(p)$ 上半連續，卽下式成立：

$$\varlimsup_{p'\to p} u(p')\leqslant u(p), \quad p\in D. \qquad (16.2)$$

(3)　只要以 $p=a+ib\,(\in D)$ 为中心、r 为半徑的圓全部包含于 D，則下列不等式成立：

$$u(p)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(p+re^{i\theta})\,d\theta. \qquad (16.3)$$

显然，調和函数都是次調和函数。又 $f(z)$ 在 D 单值正則时，

$\log|f(z)|$在D内为次調和函数，但当$f(z)=0$时，它的値应考虑作等于$-\infty$。由定义显然知道，若$u_1(p)$，$u_2(p)$都是次調和函数，則

$$u(p)=\max\ (u_1(p),\ u_2(p))$$

在D内也是次調和函数。不只限于两个次調和函数的情形，一般地給定了非空的在D内次調和函数族$\mathfrak{F}$，命

$$h(p)=\sup_{u(p)\in\mathfrak{F}} u(p),$$

当$h(p)$满足$h(p)<+\infty$时在D内也是次調和。这只須考虑条件(1)，(2)，(3)就可以知道。又若$u_n(p)\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$都在$D$内为次調和，并且是单調减少列

$$u_1(p)\geqslant u_2(p)\geqslant u_3(p)\geqslant\cdots,$$

則当$\lim\limits_{n\to\infty} u_n(p)$不恒等于$-\infty$时，这一极限为次調和。这可以由$u_n(p)$及$\lim\limits_{n\to\infty} u_n(p)$都满足(16.2)及(16.3)的事实看出。

但是，最重要的性质是下列叫作**最大値原理**(maximum principle)的定理。

定理1　命D为Gauss平面的域，Γ是其边界。在D的次調和函数$u(p)$，在Γ的各点q有有穷实常数M，使

$$\overline{\lim_{p\to q}}\, u(p)\leqslant M \tag{16.4}$$

成立，則在D内任何处都有$u(p)<M$或恒等地有$u(p)\equiv M$。

証明　对于$p\in D$的$\sup u(p)$設是S，則$-\infty<S\leqslant+\infty$。由sup的定义，有$p_n\in D(n=1,\ 2,\ \cdots)$的点列存在，使

$$\lim_{n\to\infty} u(p_n)=S.$$

因$\overline{D}=D\cup\Gamma$为有界閉集，故$\{p_n\}$有子列$p_{n_\nu}(\nu=1,\ 2,\ \cdots;\ n_1<n_2<\cdots)$，$\overline{D}$有点$p^*$存在使

$$\lim_{\nu\to\infty} p_{n_\nu}=p^*. \tag{16.5}$$

若 $p^* \in D$，则 $u(p^*)=S$，因为 $u(p)$ 上半連續，故满足 $u(p)<S$，$p\in D$ 的点为开集，用 G 表示它，若 G 不是空的，既是 $u(p^*)=S$，G 在 D 內有边界，命这边界的一点为 p_0，以 p_0 为心，有适当的 r，使圓 $|z-p_0|<r$ 完全含于 D 內，并且在这个圓的周上有 G 的点。G 包含这个圓周的弧，而 $u(p_0)=S$，所以 (16.2)，(16.3) 是互相矛盾的。因之，G 是空集在 D 內 $u(p)\equiv S$，且由 (16.4) $S\leqslant M$。

其次，若 $p^*\in\Gamma$，则由 (16.4) 及 (16.5) 有 $S\leqslant M$。若 $u(p)=M$ 的点 p 在 D 內，则重复以上的証明得出 $u(p)\equiv M$。因此，只剩下在 D 內各点 $u(p)<M$ 的情形。

又假定 $u_1(p)$，$u_2(p)$ 在域 D 內次調和，则对于满足 $a_1, a_2\geqslant 0$ 的实数 a_1, a_2

$$a_1u_1(p)+a_2u_2(p) \tag{16.6}$$

显然在 D 內也是次調和的。

对于定义在 Gauss 平面的域 D 的函数 $u(p)$，若 $-u(p)$ 在 D 內次調和，则 $u(p)$ 叫做在 D 的**超調和函数** (superharmonic function)。

2) **Perron 定理** 如前所述，我們已經知道了对于圓的 Dirichlet 問題的解 (Poisson 积分)，利用这个叙述 Perron 定理如下。

定理 2 (Perron) 有在 Gauss 平面域 D 超調和的函数 $v(p)$ 及非空的在 D 次調和的連續函数族 $\mathfrak{P}$，满足下列三条件：

(1) 任一 $u(p)\in\mathfrak{P}$ 满足 $u(p)\leqslant v(p)$。

(2) 任取两个 $u_1(p)$，$u_2(p)\in\mathfrak{P}$，则 $u(p)=\max\{u_1(p), u_2(p)\}$ 仍属于 $\mathfrak{P}$。

(3) 任取含于 D 的圓 V，用 $q=p_0+Re^{i\varphi}$ 表示 V 的圓周，对于任意的 $u(p)\in\mathfrak{P}$，定义新的函数 $u^*(p)$：$p\in D-V$ 时，$u^*(p)=u(p)$；$p=p_0+re^{i\theta}\in V$ 时，

$$u^*(p)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(p_0+Re^{i\varphi})\,\frac{R^2-r^2}{R^2+2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\varphi,\tag{16.7}$$

則 $u^*(p)\in\mathfrak{P}$.

这时候，命

$$H(p)=\sup_{u\in\mathfrak{P}}u(p),\tag{16.8}$$

則 $H(p)$ 是在 D 内的調和函数。

証明　首先証明 $H(p)$ 是連續的。今命 p_0 为 D 的任一点，以 p_0 为中心，作含于 D 内的圓 $V:|z-p_0|\leqslant R\,(R>0)$．任取 $u(p)\in\mathfrak{P}$ 作 $u^*(p)$，由 (16.7)，$u^*(p)$ 是在 V 内調和，在圓周上与連續的 $u(p)$ 一致的函数。因此，$u(p)-u^*(p)$ 在 V 内次調和，在圓周上具边界值 0．故由最大値原理，在 V 内 $u(p)-u^*(p)\leqslant 0$．卽在 V 内 $u(p)\leqslant u^*(p)$，因为 $u^*(p)\in\mathfrak{P}$，故

$$H(p)=\sup_{u^*\in\mathfrak{P}}u^*(p)\quad(p\in V)\tag{16.9}$$

成立。在 $p\in V$，将

$$(R-r)^2\leqslant R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2\leqslant(R+r)^2$$

代入(16.7) 右端的被积函数，只要 $u(p_0+Re^{i\varphi})\geqslant 0\,(0\leqslant r<R)$，

$$\begin{aligned}u^*(p)&\leqslant\frac{R+r}{R-r}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(p_0+Re^{i\varphi})\,d\varphi\right)\\&=\frac{R+r}{R-r}\,u^*(p_0).\end{aligned}\tag{16.10}$$

同样地假定 $u(p_0+Re^{i\varphi})\geqslant 0$，又得下列不等式：

$$\frac{R-r}{R+r}\,u^*(p_0)\leqslant u^*(p).\tag{16.11}$$

因此，当 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$，$u(p_0+Re^{i\varphi})\geqslant 0$ 的时候，选 $u_n^*(p)$ $(n=1,2,\cdots)$，使

$$u_1^*(p_0)\leqslant u_2^*(p_0)\leqslant\cdots;\quad\lim_{n\to\infty}u_n^*(p_0)=H(p_0)$$

成立，則对于任意的 $u^*(p)$ 有充分大的数 N，当 $n\geqslant N$ 时可以考虑为 $u^*(p_0)\leqslant u_n^*(p_0)$（若 $u^*(p_0)=H(p_0)$，就可把它取作 $u_n^*(p)$）。于是由(16.10)有

$$u^*(p)\leqslant\frac{R+r}{R-r}u^*(p_0)\leqslant\frac{R+r}{R-r}u_n^*(p_0),\quad n\geqslant N.$$

因此对于任意給定的正实数 $\varepsilon>0$，若取满足

$$\frac{R+r_0}{R-r_0}<1+\frac{\varepsilon}{H(p_0)}$$

的 $r_0(r_0>0)$，則对于满足 $0\leqslant r<r_0$ 的任意 r，有

$$H(p)=\sup_{u^*\in\mathfrak{P}}u^*(p)\leqslant\frac{R+r}{R-r}H(p_0)<\left(1+\frac{\varepsilon}{H(p_0)}\right)H(p_0)$$
$$=H(p_0)+\varepsilon.$$

同样由(16.11)，有 $r_0'>0$，当 $0\leqslant r<r_0'$ 时，$H(p)>H(p_0)-\varepsilon$ 成立，即 $H(p)$ 在 p_0 連續。

上面的証明中假定了当 $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$ 时 $u(p_0+Re^{i\varphi})\geqslant0$. 若这个假定不成立的时候，特别地把 $u_0^*(p)$ 固定，因 $u_0^*(p)$ 在 V 内連續，命

$$\inf_{p\in V}u_0^*(p)=m,$$

則 m 有穷。纵令只考虑满足 $u^*(p)\geqslant u_0^*(p)$ 的 $u^*(p)$，因 $H(p)$ 的值不变，故对于这样的 $u^*(p)$ 再代之以 $u^*(p)-m$，則 $u^*(p)-m\geqslant0$. 由此可以导出 $H(p)-m$ 在 $p=p_0$ 連續。故对于所有的情形得出 $H(p)$ 在 $p=p_0$ 連續。

其次，$H(p)$ 在 D 内次調和一层已在 1) 提过了。

第三，証明 $H(p)$ 在 D 内超調和。事实上，命 p_0 为 D 内任一点，以 p_0 为心，任意取包含在 D 内的圓 $|p-p_0|\leqslant R(R>0)$，用 K 表示圓周。另一方面，命 $\varepsilon>0$ 为任意正实数，对于 $p\in K$ 即 $p=p_0+Re^{i\varphi}$ 有 $u_\varphi(p)\in\mathfrak{P}$ 使 $H(p)-u_\varphi(p)<\varepsilon/2$. $u_\varphi(q)$ 是 $q\in D$ 的連續函数，如已經証明的，$H(q)$ 也是 q 的連續函数，故有含于 D 内

的 p 的邻域 $V(p)=V_\varphi$，当 $p'\in V_\varphi$ 时

$$H(p')-u_\varphi(p')<\varepsilon. \qquad (16.12)$$

对于 $p\in K$ 的各点 $p=p_0+Re^{i\varphi}$，都有 V_φ，由于 K 是有界閉集，故由 Heine-Borel 复盖定理，可选出有穷个 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$，使 $V_{\varphi_1}\cup V_{\varphi_2}\cup\cdots\cup V_{\varphi_n}\supseteq K$. 命

$$u(q)=\max\{u_{\varphi_1}(q), u_{\varphi_2}(q), \cdots, u_{\varphi_n}(q)\}, \qquad (16.13)$$

则由条件 (2) 有 $u(p)\in\mathfrak{B}$. 另一方面，当 $\nu=1, 2, \cdots, n$ 时，只要 $p'\in V_{\varphi_\nu}$，由于 $H(p')-u_{\varphi_\nu}(p')<\varepsilon$，故由 (16.13)，更应

$$H(p')-u(p')<\varepsilon, \quad p'\in K.$$

由 (16.9) 有

$$H(p_0)\geqslant u^*(p_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(p_0+Re^{i\varphi})\,d\varphi$$

$$>\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H(p_0+Re^{i\varphi})\,d\varphi-\varepsilon,$$

这里 ε 是任意的正实数，故

$$H(p_0)\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H(p_0+Re^{i\varphi})\,d\varphi.$$

由于 $H(p)$ 連續，故这一不等式表示 $H(p)$ 是超調和函数。

这样就証明了 $H(p)$ 連續，并且同时为超調和及次調和。故在含于 D 的任意圓 V 内，同时 $H(p)\leqslant H^*(p)$，$H(p)\geqslant H^*(p)$ $(p\in V)$. 即 $H(p)$ 能够用 Poisson 积分表示，从而是調和的。

3) 对于有界閉域的 Dirichlet 問題　本小节内将考虑 Gauss 平面上有界域 D 的 Dirichlet 問題，其中 D 的边界 Γ 系由 n 个 $(n=1, 2, \cdots)$ 彼此分离的 Jordan 曲綫 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 构成：

$$\Gamma=\bigcup_{i=1}^{n}\gamma_i.$$

也就是，給定在 Γ 上連續的单值实函数 $f(q)$，$q\in\Gamma$，从而証明以 $f(q)$ 为边界值的 Dirichlet 問題的解的存在。

一般地，命 Gauss 平面上域 D 的边界 Γ 上一点为 p_0，以 p_0

为中心作圓 V，如有定义在 $V\cap D$ 內的調和函数 $\omega(p)$ 滿足 $0<\omega(p)<1$，在 V 的圓周 K 及 D 的公共部分 $K\cap D$ 及 p_0 处 $\omega(p)$ 各具边界值 1 及 0：即

$$\lim_{p\to q\in K\cap D}\omega(p)=1,\quad \lim_{p\to p_0}\omega(p)=0$$

的話，把 $\omega(p)$ 叫做在 p_0 处 D 的（关于 V 的）**栅函数**(barrior)。

欲証明滿足前述条件的有界域的边界 Γ 的各点，及以之为中心充分小的圓的栅函数存在，只須証下列定理。

定理 3 在单位圓 $K:|z|<1$ 內，联結其中心 $z=0$ 及圓周上一点 $z_0=e^{i\varphi}$ 的 Jordan 曲綫設是 β。于是，有定义在 $K-\beta$ 的調和函数 $\omega_1(z)$，滿足：$0<\omega_1(z)<1$，在 K 的圓周 S 上除去 z_0 的各点及 $z=0$ 具边界值

$$\lim_{\substack{z\to q\in S\\ q\neq z_0}}\omega_1(z)=1,\quad \lim_{z\to 0}\omega_1(z)=0. \tag{16.14}$$

証明 不失普遍性可以取 $z_0=-1$, $\varphi=\pi$。取函数

$$w(z)=\log z, \tag{16.15}$$

$\log 1=0$ 的一个分支，因 $K-\beta$ 是单連通的，故 $w(z)$ 在該处是单值函数。現在来看 $K-\beta$ 經 $w(z)$ 映射成怎样的域。值域在 w 的下半平面 $\Im w<0$，由 -1 出发反时針方向繞单位圓周 S 一周回到 -1 时，$w(z)$ 在虛軸上由 $-\pi i$ 出发最后到达 πi。β 的上下两側成为不同的象，由 $z=0$ 出发沿 β 的上側到 -1 时，則 $w=u+iv$ 是由 $u=-\infty$ 出发在 $\Im w>0$ 移动最后到达 $+\pi i$ 的曲綫 τ_1，z 沿 β 的下側移动时的 w 值，是由 $u=-\infty$ 出发在 $\Im w<0$ 移动最后到达 $-\pi i$ 的曲綫 τ_2，β 的一个点其上下側对应的值相差 $2\pi i$，这就是所謂 τ_1 与 τ_2 之間的幅度。命 $\varphi_1=\arg(-\pi i-w(z))$，$\varphi_2=\arg(\pi i-w(z))$，并使 $|\varphi_i|\leqslant\pi/2$ $(i=1,2)$ 以决定 φ_1, φ_2，則

$$\omega_1(z)=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}$$

显然是满足 (16.14) 的函数，且因 φ_1，φ_2 都是在 $K-\beta$ 上的調和函数，故 $\omega_1(z)$ 也是在該处的調和函数。

Gauss 平面上有界域 D 具上述边界 $\bigcup_{i=1} \gamma_i$ 时，由定理 3 容易作边界上点 p_0 的栅函数。即作以 p_0 为中心充分小的圆 V，使 V 只与 $p_0 \in \gamma_i$ 的 γ_i 相交，且 γ_i 包含 V 外部的点。由 p_0 出发在 γ_i 上沿某一方面前进最初达到 V 的周界这一部分叫做 β^*，命 $z=(p-p_0)/R$（R 是 V 的半徑），这样由 p 平面移到 z 平面，这时命 β^* 的像为 β，則由定理 3 所給的函数 $\omega_1(z)$ 看做是 p 的函数时，$\omega(p)=\omega_1(z)$ 就是欲求的栅函数。

有了以上的准备后，我們来解决本小节主要目标的 Dirichlet 問題。

定理 4　命 D 为 Gauss 平面上的有界域，它的边界 Γ 是彼此分离的有穷个 Jordan 曲綫 $\gamma_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 所构成。在 Γ 上任給連續单值实函数 $f(z)$，則有以之为边值的在 D 內調和的函数。

証明　給定的边界值 $f(z)$ 在 Γ 上連續，Γ 是有界閉集，故有实数 M 满足 $2|f(z)|\leqslant M<+\infty$。連續于 D 的次調和函数 $u(p)$，对于一切 $q\in\Gamma$ 边界条件

$$\overline{\lim_{p\to q\in\Gamma}} u(p)\leqslant f(q) \tag{16.16}$$

成立的函数族用 $\mathfrak{U}_f$ 表示，則 $\mathfrak{U}_f$ 不是空集。事实上，$u(p)=-M$ 显然满足这个条件。

命 $v(p)=M$，則一切 $u(p)\in\mathfrak{U}_f$ 都有 $u(p)\leqslant v(p)$（由最大値原理），并且 $v(p)$ 是超調和函数。显然 $\mathfrak{U}_f$ 满足定理 2 的条件(3)。这样由定理 2，

$$H(p)=\sup_{u\in\mathfrak{U}_f} u(p)$$

在 D 調和。因此只剩下証明 $H(p)$ 取边界值 $f(q)$，$q\in\Gamma$ 了。

为了証明这一点，命 ε 为任意給定的正实数，由 $f(z)$ 的連續性，以 q 为中心作充分小的圓 V，使

$$|f(q')-f(q)|<\varepsilon, \quad q'\in V\cap\Gamma, \tag{16.17}$$

且 V 不但是只与一个 γ_i 相交，并且 γ_i 还含 V 外部的点。因此由定理 3，D 在 q 处有柵函数 $\omega(p)$，它滿足 $0<\omega(p)<1$, $p\in V$，在 V 的周界而属于 D 的点边界值是 1，在 q 的边界值为 0，且在 $V\cap D$ 内为調和函数。今命

$$v(p)=\begin{cases} M+\varepsilon, & \text{当 } p\in D-V \text{ 时}, \\ M\omega(p)+\varepsilon, & \text{当 } p\in V\cap D \text{ 时}, \end{cases}$$

于是随 Γ 的任意点 q' 在 V 的外部或不在外部，分别有

$$\underline{\lim_{p\to q'}}\, v(p)\geqslant M+\varepsilon \text{ 或 } \geqslant\varepsilon. \tag{16.18}$$

命 $v_1(p)=-v(p)+f(q)$，由于 $v(p)$ 是 D 内的連續超調和函数，故 $v_1(p)$ 在該处为連續次調和函数。随 $q'\in\Gamma$ 在 V 的外部或不在外部，由 (16.18) 分别有

$$\overline{\lim_{p\to q'}}\, v_1(p)\leqslant -M-\varepsilon+f(q) \text{ 或 } -\varepsilon+f(q). \tag{16.19}$$

前者由 M 的定义，后者由 (16.17) 都有 $\leqslant f(q')$。故 $v_1(p)\in\mathfrak{U}_f$，从而，$H(p)\geqslant v_1(p)$, $p\in D$。故

$$\underline{\lim_{p\to q}}\, H(p)\geqslant \underline{\lim_{p\to q}}\, v_1(p)=-\varepsilon+f(q). \tag{16.20}$$

另一方面，命 $v_2(p)=-v(p)-f(q)$，則任意的 $u(p)\in\mathfrak{U}_f$ 由 (16.16) 及 (16.18)，根据 $q'\in\Gamma$ 在 V 的外部或不在外部，分别有

$$\overline{\lim_{p\to q'}}\,\{u(p)+v_2(p)\}\leqslant\overline{\lim_{p\to q'}}\, u(p)+\overline{\lim_{p\to q'}}\, v_1(p)$$

$$\leqslant f(q')-f(q)-M-\varepsilon \text{ 或 } f(q')-f(q)-\varepsilon.$$

由 M 的定义及 (16.17)，上式的右端不論是那一种情形都是負的。即 $\overline{\lim\limits_{p\to q'}}\,\{u(p)+v_2(p)\}<0$，而 $u(p)+v_1(p)$ 的各項都在 D 連續次調和，根据最大値原理，在 D 内有 $u(p)\leqslant -v_2(p)$。即 $H(p)$

$\leqslant -v_2(p)$，$p\in D$，命 $p\to q$ 得

$$\overline{\lim_{p\to q}} H(p)\leqslant f(q)+\varepsilon. \tag{16.21}$$

合并(16.20)及(16.21)，注意 $\varepsilon>0$ 是任意的，

$$\lim_{p\to q} H(p)=f(q),$$

这是欲求的結果。

这个定理当放宽 $f(q)$ 在 Γ 上連續时，仍旧可以成立，将在下节看到。

4) Green 函数 命 D 为不包含 $z=\infty$ 的邻域的数球面上的任意域，q 为 D 内的任意点．在 D 内部除去点 q 外在其他各点 p 有定义的实值函数 $g(p, q)$ 满足以下两条件：

(1) 在 $p\in D-q$，$g(p,q)=-\log r+h(p)$，$r=|p-q|$（其中 $h(p)$ 定义于包括 q 的 D 内各点，并且是調和的）。

(2) 在 D 的边界 Γ（就数球面上考虑）的各点 s，$g(p, q)$ 具边界值 0：

$$\lim_{p\to s} g(p, q)=0.$$

则把 $g(p, q)$ 叫做 **D 关于 q 的 Green 函数**。今以 q 为中心作充分小的圆 V，由条件(1)知 $g(p, q)$ 当 p 在 V 的内部或周界上时是正的。因 $-g(p, q)$ 在 $D-V$ 上为次調和函数，且在边界上它的值是 0 或为負数，故由最大值原理知道 $g(p, q)$ 当 $p\in D(p\neq q)$ 时 $g(p, q)>0$. 将这个推論方法应用于

$$d(p, q)=g(p, q)-g(q, p)$$
$$(p, q\in D, \quad p\neq q).$$

首先固定 q，命 p 趋近于边界 Γ 上任一点 s. 由条件(2)第一項趋于 0，至于第二項则由上述的結果 $g(q, p)>0$，故

$$0\leqslant \underline{\lim_{p\to s}}\, g(q, p)\leqslant +\infty.$$

所以 $\overline{\lim\limits_{p\to s}}\, d(p, q) \leqslant 0$. 另一方面，由条件 (1) $d(p, q)=h(p)-h(q)$，在固定的 q (作为可去奇点) 也是調和的。故由最大值原理知道 $d(p, q)$ 当 $p\in D$ 时必須 $d(p, q)\leqslant 0$. 固定 p 认为 q 的函数，重复以上的討論，得出当 $q\in D$ 时有 $d(p, q)\geqslant 0$. 故 $d(p, q)\equiv 0$. 因此証明了下面关于 Green 函数**对称性**的定理。

定理 5 域 D 內的 Green 函数 $g(p, q)$ 关于它的两个变数是对称的：$g(p, q)=g(q, p)$.

其次，考察 D 为 Gauss 平面的有界域的情形，它的边界 Γ 系由有穷个互相分开的 Jordan 曲綫构成。q 为 D 的任一点时，欲求 D 的 Green 函数，由条件(1)，只需求出

$$h(p)=g(p, q)+\log r, \quad r=|p-q|$$

就够了。由假設，$h(p)$ 在 D 內各点調和，在 Γ 上的任一点 s 具边界值 $\log|s-q|$. 而边界值

$$f(s)=\log|s-q|,$$

由于 Γ 是有界閉集且 $q\overline{\in}\Gamma$，故是 s 的单值連續实值函数。由定理 4 知道这样的 $h(p)$ 一定存在。因而得到了保証 Green 函数存在的下列定理。

定理 6 域 D 为 Gauss 平面的有界域，它的边界由有穷个彼此分离的 Jordan 曲綫构成。則对于任一点 q, D 的 Green 函数 $g(p, q)$ 存在。

§17 单連通域的共形映射

1) **Riemann 基本定理** 关于共形映射存在性的研究，由 Riemann 1851 年的学位論文 (Dissertation) 开始。为了叙述以 Riemann 命名的这一基本定理，先从几个定义开始。

取 Riemann 面 R 上的任意两点 p, q，連此二点的 Jordan 曲綫 w_1, w_2 同倫的涵义，已經在 §14, 2) 說明了，w_1 及 w_2 互为同倫

时用符号 $w_1\sim w_2$ 表示。由同倫的定义显然知道，对于同一 Jordan 曲綫 w, $w\sim w$. 又若 $w_1\sim w_2$, 則 $w_2\sim w_1$; 若 $w_1\sim w_2$, $w_2\sim w_3$, 則 $w_1\sim w_3$, 卽彼此同倫的 Jordan 曲綫构成一个类。这叫做 R 上連結 p, q 的**道路类**(class of paths).

其次，考察 $p=q$ 的情形，这时上述的曲綫成为由 p 出发又回到 p 的 Jordan 曲綫，把它叫做**紐形弧**(loop). w_1 及 w_2 都是由点 p 出发又回到 p 的紐形弧，先繞 w_1 一周再继續繞 w_2 一周也是由 p 出发又回到 p 的紐形弧，用 $w_1\cdot w_2$ 表示之。这样显然可以看出，对于任意三个紐形弧 w_1, w_2, w_3 有 $w_1\cdot(w_2\cdot w_3)=(w_1\cdot w_2)\cdot w_3$ 成立。又 p 点也可以看作是一个紐形弧，用 1 表示这一紐形弧，則显然可以看出对于任意的紐形弧 w 有 $w\cdot 1=1\cdot w=w$. 其次，当 w_1, w_2, w_1', w_2' 为滿足 $w_1\sim w_1'$, $w_2\sim w_2'$ 的紐形弧时，由同倫的定义显然知道 $w_1\cdot w_2\sim w_1'\cdot w_2'$ 成立。因此上述乘法：$w_1\cdot w_2$ 可以看作是对于由 p 出发又回到 p 的道路类的运算。最后，当 w 为任意的紐形弧时，用 w^{-1} 表示沿 w 逆向走一周的紐形弧。$w\cdot w^{-1}$ 或 $w^{-1}\cdot w$ 虽然与 1 不一致，但是考虑由 p 出发到中途又折回 p 的走法时 $w\cdot w^{-1}$, $w^{-1}\cdot w$ 都和 1 同倫：$w\cdot w^{-1}\sim w^{-1}\cdot w\sim 1$. 这样由 p 出发又回到 p 的道路类构成一个群。命 W_p 表示这个群。可以知道，W_p 的結构实际上与 p 无关。今任取 R 的两点 p 及 q, 比較 W_p 与 W_q. 命 v 为連結 p 与 q 的任意 Jordan 曲綫，W_q 的元素卽用属于該类的紐形弧 u 表示，$v\cdot u\cdot v^{-1}$ 是 W_p 类中的元素。于是，由于 u 与 $v\cdot u\cdot v^{-1}$ 的对应，故 W_q 与 W_p 的对应是 1 对 1 的，并且乘法运算是保持的，卽 W_p 及 W_q 群同构。这个群叫做 Riemann 面 R 的**基本群** (Fundamental group). 若这个群只由单位 1 构成，則称 R 是**单連通的**。

又 Riemann 面 R 上的一个閉集 A, 在 $R-A$ 有两个不同点 p, q, 若 R 上連結 p, q 的任意 Jordan 曲綫都与 A 相交，叫做 A

分割(morceler)R. 在 R 上可以作 n 个彼此不相交的簡单 Jordan 閉曲綫 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$, 这些曲綫的并集 $\bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i$ 不能分割 R, 但这样的 $n+1$ 个曲綫不能存在的时候，叫做 R 具**亏数** (genus)n. $n=0$ 时，換句話說 R 上任意的簡单 Jordan 閉曲綫都分割 R 时，叫做 R 为**单叶型** (schlichtartig). 球面以及球面上的域是单叶型。又**圓环面**(torus)卽 3 維 Euclid 空間(x, y, z)內的曲面

$$(\sqrt{x^2+y^2}-b)^2+z^2=a^2 \quad (0<a<b)$$

考慮作 Riemann 面时具亏数 1.

单連通 Riemann 面由它的定义显然知道是单叶型。故在复数球面上考慮时，§2, 2) 給与的单連通域自然是作为特殊情形包括在內。

所謂 Riemann 映射定理或基本定理是指下述定理 A.

定理 A 任意的单連通 Riemann 面 R 能够 (但除去有窮次的支点不計)一对一且共形地映射成下列三者之一:

(1) 复数球面(这时 R 叫做椭圓型);

(2) Gauss 全平面(R 为抛物型);

(3) 单位圓的內部(R 为双曲型)。

在应用上最重要的是情形(3), R 为复数球面的域时可补充如下:

定理 B 复数球面上边界点至少有两点的单連通域 D 能够一对一且共形映射到单位圓 $|z|<1$ 的內部。又假定这个域的边界的一部分由簡单 Jordan 弧 Γ 构成，并且 Γ 的內部 Γ^0(除去两端点的部分)不是 D 的边界除去 Γ 部分的聚点，則上述的一对一共形映射，可以推广为 D 及 Γ^0 的并集到单位圓 $|z|<1$ 和它的圓周 $|z|=1$ 的一部分的一对一双方連續变換。

本节的目的是証明这个定理的前一部分。

定理 1 复数球面上边界点至少有两点的单連通域 D 能够一

对一地共形映射到单位圆 $|w|<1$ 的内部。

証明 命 D 的边界为 Γ，则 Γ 在复数球面上构成一个連通閉集。否則假定 Γ 能够分成两个互斥閉集 Γ_1, Γ_2，在 D 内作一折綫 γ，使 Γ_1 和 Γ_2 中有一个在 γ 的內部，另一个在 γ 的外部，这样与 D 为单連通域的假定相反。

由于 Γ 至少有两点，故有两点 $a, b(\neq\infty)$ 属于 Γ。經过

$$\zeta=\sqrt{\frac{z-a}{z-b}},$$

D 被映射到 ζ 平面不相重的两个域 D_1, D_2，其中的每一个域是 D 的一对一共形象。例如取 D_1，并命 $c\in D_2$ 且

$$\zeta_1=\frac{1}{\zeta-c},$$

則 D_1 一对一共形地映射到 ζ_1 平面的有界域 D^*。

因此可以不失普遍性，假定最初的 D 就是 Gauss 平面的单連通有界域。根据 §16 的定理 6，对于 D 内的一点 q 存在 Green 函数 $g(p, q)$，由 §5 的定理 9，在以 $p(\neq q)$ 为圆心的各圓邻域(因圓是单連通域)，$g(p, q)$ 的共軛調和函数 $h(p, q)$ 除应加的常数外唯一确定。固定点 p_0，取其中的一个

$$g(p, q)+ih(p, q), \tag{17.1}$$

在 $D-q$ 内实行解析开拓所得的函数 $g(p, q)+ih(p, q)-\log(p-q)$ 的实部在 D 内(q 点包括在内)到处都是調和的，再者，D 是单連通，仍由 §5 定理 9，除去相差一个純虛数常数 $i\beta$ 外可以唯一确定。因之，(17.1) 是沿反时針方向繞 q 点一周后增加 $2\pi i$ 的在 $D-q$ 的正則函数。命

$$w(p, q)=e^{-(g(p,q)+ih(p,q))} \tag{17.2}$$

在 $D-q$ 内各点单值正則，在点 q 的邻域則 $|w(p,q)|=e^{-g(p,q)}<1$，点 q 还是可去奇点。故 $w(p, q)$ 在 D 内各点单值正則，由于

$g(p, q) > 0$，故 $|w(p, q)| < 1$.

要看在 q 点的状况，仍命

$$g(p, q) + ih(p, q) - \log(p-q) = \varphi(p, q),$$

則

$$w(p, q) = e^{-(\log(p-q)+\varphi(p, q))} = (p-q)e^{-\varphi(p, q)}, \qquad (17.3)$$

因 $\varphi(p, q)$ 在 D 内单值正則，故 $e^{-\varphi(p, q)} \neq 0$，即 $w(p, q)$ 在 $p=q$ 具一級零点。

其次，为了証明 $w(p, q)$ 必取一次且只取一次 $|w|<1$ 内的点，命 w^* 为滿足 $|w^*|<1$ 的任意值，因为 D 是 Gauss 平面的有界域，它的边界 Γ 是有界閉集。任取 Γ 的一点 ξ，命 $p \to \xi$，由于 $g(p, q) \to 0$，故以 ξ 为中心作充分小的圓，在圓周上属于 D 内的点，能使

$$0 < g(p, q) < \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < -\log|w^*|$$

成立。因为 Γ 是有界閉集，故能够找出有穷个这样的圓把 Γ 复蓋，也就是在 D 内可以作一包含 q 为内点的簡单 Jordan 曲綫 γ，在 γ 上使 $|w(p,q)| = e^{-g(p, q)} > e^{-\varepsilon} > |w^*|$ 成立。故在 γ 内 $w(p,q) - w^*$ 的根的个数，根据 Rouché 定理(§ 11 定理 9)，等于 $w(p, q)$ 的根的个数。上面已經証明了 $w(p, q)$ 在 q 具一級零点，且由(17.4)知道它沒有另外的根，故 $w(p, q) - w^*$ 在 γ 内有且只有一个根。在 γ 外边則約略变动 γ 可使 $0 < g(p, q) < \varepsilon$ 成立。总之，$w(p, q)$ 就是欲求的映射函数。

2) **边界对应** D 是 Gauss 平面的有界域，Γ 是它的边界。Γ 上任意两个自 D 可达的点 a, b，可用 D 内的簡单 Jordan 弧連結起来。这个曲綫将 D 内其他部分分成了两部，所以叫作 D 的剖綫(cross cut)。設有剖綫列 $q_n (n=1, 2, \cdots)$，$q_{n+i} (i=1, 2, \cdots)$ 与之无关地含于 $D - q_n$ 的同一連通成分 g_n，并且 q_n 的直徑收斂于 0 时，称 $\{q_n\}$ 构成剖綫的**基本列**，而上述域 g_n 的閉包的公共部分

$$P=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bar{g}_n$$

叫做这个基本列决定的**边界元素**(Primende)。

由两个基本列 q_n, $q'_n(n=1, 2, \cdots)$ 所决定的域列 g_n, g'_n,对于各个 n 有 N 存在,使 $g_n\supseteq g'_N$, $g'_n\supseteq g_N$ 成立时,叫做 (q_n) 及 (q'_n) 为同等。同等的基本列虽然决定同一边界元素,但其逆却不一定成立。例如 D 为单位圆,但除去正实轴部分及原点,于是,用 $z=x+iy$, $0<x<1$, $y=0$ 表示的点都給出两个不同等的基本列。

根据 Schoenflies 定理,边界 Γ 的一部分由简单 Jordan 曲綫 γ 构成,γ 的各点不是 $\Gamma-\gamma$ 的聚点的时候,则 γ 的各点 p 是自 D 的可达点。故 D 内有以 p 为終点的简单 Jordan 曲綫 Λ. 以 p 为中心作充分小的圆 $K(r)$: $|z-p|=r$,由 p 出发沿 Λ 逆溯,最初与圆 $K(r)$ 的交点叫作 $\Lambda(r)$,其次再由 $\Lambda(r)$ 出发沿圆周向左右两侧移动,最初与 γ 的交点分别叫作 $A(r)$, $B(r)$,则 $A(r)$, $B(r)$ 显然为自 D 的可达点。在上述圆周上,命 $q(r)$ 表示剛才点通过的圆弧 $A(r)$, $B(r)$,则对于满足 $r_1>r_2>\cdots$, $\lim r_n=0$ 的任意实数 r_n, $q(r_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 构成基本列,这时候 $q(r_n)$ 所决定的域 $g(r_n)$ 即以上述圆弧 $A(r_n)$, $B(r_n)$ 及由此两点所确定的曲綫 γ 为边界,其直徑收斂于 0. 故由 $\{g(r_n)\}$ 决定的边界元素就是 p. 关于其他边界元素,由 a_n, b_n 所确定的 γ 上的弧,当 $n\to\infty$ 时,它的直徑也收斂于 0. 与 γ 有共点的边界元素只能是由各个 γ 上的一点构成的。

对于 Gauss 平面域 D 的边界 Γ 上一点 p,只要 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p$, $p_n\in D(n=1, 2, \cdots)$,则 D 内有以 p 为終点的简单 Jordan 弧 γ,点列 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$的点就按照这个順序排在 γ 上的时候,称 p 为自 D 单一可达边界点。于是,下列定理成立。

定理 2 在 Gauss 平面有两个有界单連通域 D 及 D',两者之

間由函数

$$w=f(z), \quad z\in D, \quad w\in D'$$

給出一对一的共形映射关系。D 及 D' 的边界各为 Γ 及 Γ'，ζ 是 Γ 上一个自 D 的可达边界点，γ 是以 ζ 为終点的 D 內簡单 Jordan 曲綫。命 $\omega_1, \omega_2(\omega_1\neq\omega_2)$ 为 Γ' 上两个自 D' 的单一可达边界点。这时 γ 的象 $f(\gamma)$ 不能无穷接近 ω_1, ω_2。詳細的說，就是在 γ 上不論怎样取趋近于 ζ 的点列 $z_1, z_2, \cdots$，都不能有两个子列 $z_1', z_2', \cdots$ 及 $z_1'', z_2'', \cdots$，滿足

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n')=\omega_1, \lim_{n\to\infty} f(z_n'')=\omega_2. \tag{17.4}$$

証明 因为 $\omega_1\neq\omega_2$，故 $|\omega_1-\omega_2|=\delta>0$，又因 D' 为有界，故 δ 为有穷。不失普遍性，可命 $z_n'=z_{2n-1}, z_n''=z_{2n}$，由 (17.4) 可假定 $|f(z_{2n-1})-\omega_1|$ 及 $|f(z_{2n})-\omega_2|$ 都小于 $\delta/8$。由假設 ω_1, ω_2 都是自 D' 的单一可达边界点，故在 D' 內把 $f(z_{2n-1})\ (n=1, 2, \cdots)$ 依次連結起来，又把 $f(z_{2n})\ (n=1, 2, \cdots)$ 也依次連結起来，这样就得出分別趋近于 ω_1, ω_2 的簡单 Jordan 曲綫 γ_1, γ_2。不失普遍性可认为 γ_1, γ_2 各在圓 $|w-\omega_i|<\delta/4\ (i=1, 2)$ 內的 D' 部分。取 $f(\gamma)$ 的弧其两端为 $f(z_{2n-1}), f(z_{2n})$，对于 $n<m$ 的 m 又取其端点为 $f(z_{2m+1}), f(z_{2m+2})$ 的弧。这两个弧与 γ_1, γ_2 的两端各为 $f(z_{2n-1})$, $f(z_{2m+1})$ 及 $f(z_{2n}), f(z_{2m+2})$ 的弧一共四根 Jordan 弧，在四个点每个点那里有两根相交。这样前两根的全部与后两根的一部（或全部）就构成一个 Gauss 平面的曲綫矩形(参看图 17.1)。这个曲綫矩形的周界都是 D' 的点，D' 既是单連通域，故曲綫矩形的內部必須都含于 D'。在連結 $f(z_{2n})$ 及 $f(z_{2m+1})$ 的任意 D' 內曲綫 Λ 上任取一点 P，自 P 出发向 Λ 两侧前进，既要与上述曲綫弧 $f(z_{2n-1})$, $f(z_{2n})$ 及 $f(z_{2m+1}), f(z_{2m+2})$ 不相交，又要趋近于 Γ' 的点，这样的曲綫必与上述曲綫弧 $f(z_{2n-1}), f(z_{2m+1})$ 及 $f(z_{2n}), f(z_{2m+2})$ 相交。这

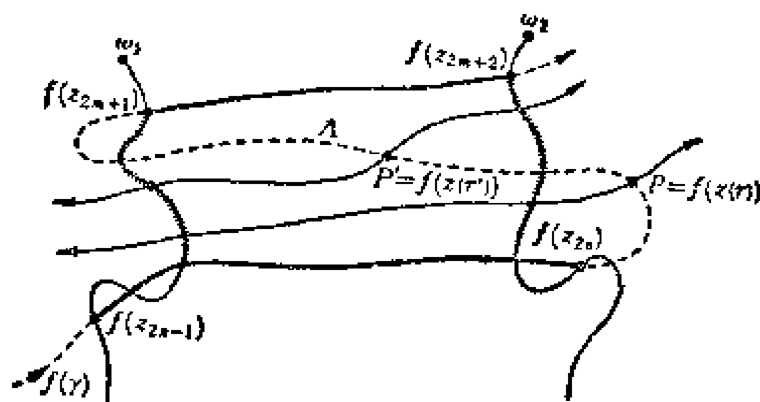


图 17.1

是平面的拓扑性质，用$(2n,\ 2n+1,\ 2m+2,\ 2m+3)$代替$(2n-1,\ 2n,\ 2m+1,\ 2m+2)$，同样事实也成立。为方便起見这一性质叫做“性质 A”。

今以 z 平面上的 ζ 为中心，作半徑为 r 的圓 $K(r)$，取 r_0 充分小，只要 $0<r\leqslant r_0$，不妨設 γ 的以 z_1, z_3 为端点的弧是在这个圓外部的。

对于 $0<r\leqslant r_0$ 的所有 r，由 ζ 出发沿 γ 的逆方向前进时，有最初与 $K(r)$ 相交的点。命 $z(r)$ 表示这个点。因为 γ 到 ζ 的中途可以考虑为折綫，故 $z(r)$ 在 γ 上以可数个弧出現。取 n 为充分大，则 γ 上比 z_n 靠前（即自 z_n 出发沿 γ 向 ζ 前进时通过）的点可以考虑在 $K\left(\dfrac{r}{2}\right)$ 的內部。这样由 $z(r)$ 出发在 $K(r)$ 的圓周上左右前进时，$f(z)$ 所画的曲綫 $L(r)$ 决不与以 $f(z_1)$, $f(z_2)$, $f(z_3)$, $\cdots$, $f(z_n)$, $f(z_{n+1})$, $\cdots$ 作两端点的 $f(\gamma)$ 的弧相交。故由上述的性质 A，曲綫 $L(r)$ 必須与 γ_1, γ_2 相交。

因为 D 是开集，故 $K(r)$ 与 D 的公共部分被分成可数个連通成分的弧，其中含 $z(r)$ 的象为 $L(r)$，故由上述結果，$L(r)$ 的长比 γ_1 及 γ_2 的距离的一半或 $\dfrac{\delta}{4}$ 为大。

其次，給定任意正实数 ε，滿足 $0<\varepsilon\leqslant r\leqslant r_0$ 的曲綫 $L(r)$ 全体为 D' 的一部分，它的面积 S 为

$$S=\iint |f'(z)|^2dx\,dy=\int_\varepsilon^{r_0}\int|f'(\zeta+re^{i\theta})|^2r\,dr\,d\theta.$$

由 Schwarz 不等式有

$$\left(\int|f'(\zeta+re^{i\theta})|r\,d\theta\right)^2\leqslant\int|f'(\zeta+re^{i\theta})|^2r^2d\theta\int d\theta$$

$$\leqslant 2\pi\int|f'(\zeta+re^{i\theta})|^2r^2d\theta.$$

更因

$$\int|f'(\zeta+re^{i\theta})|r\,d\theta=\int|f'(z)||dz|=L(r),$$

故有

$$\frac{\delta^2}{32\pi r}<\frac{\{L(r)\}^2}{2\pi r}\leqslant\int|f'(\zeta+re^{i\theta})|^2r\,d\theta,$$

$$\frac{\delta^2}{32\pi}\int_\varepsilon^{r_0}\frac{dr}{r}<\int_\varepsilon^{r_0}\int|f'(\zeta+re^{i\theta})|^2r\,d\theta\,dr=S,$$

$$\log r_0-\log\varepsilon<\frac{32\pi}{\delta^2}S. \tag{17.5}$$

S 自然不能大于 D' 的面积。又因 D' 为有界域，故 S 是与 ε 无关的有界数值，由(17.5)当 $\varepsilon\to0$ 时左边的极限值为 $+\infty$，因此产生矛盾。

定理3 D 为 Gauss 平面上的单連通有界域，它边界的一部分由簡单 Jordan 弧 Γ 构成。自 Γ 去掉两个端点的 Γ^0 不是 D 的其余边界的聚点。这时如果 $w=f(z)$ $(z\in D)$ 給出了 D 到单位圓 $|w|<1$ 內部的一对一共形映射，则函数

$$w=f(z)$$

同时給出 $D\cup\Gamma^0$ 与 $|w|<1$ 再加 $|w|=1$ 上某一部分之間的一对一双方連續对应。

証明 w 平面单位圓 $|w|<1$ 的边界：$|w|=1$ 上的所有点显

然是自单位圆内的单一可达边界点，z 平面 Γ^0 上的点也是自 D 的单一可达边界点，这是由于 Γ^0 的任何点都不是其余边界点的聚点。

任取 Γ^0 的一点 p，有满足 $p_n\in D(n=1, 2, \cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty} p_n=p$ 的点列 $\{p_n\}$，連結 p_n 可得 D 内簡单 Jordan 弧 γ，其終点为 p。因此由定理 2，$f(\gamma)$ 为以 $|w|=1$ 上的一点 $e^{i\theta(p)}$ 为終点的曲綫，即

$$\lim_{n\to\infty} f(p_n)=e^{i\theta(p)}.$$

因此 $\theta(p)$ 又是单值連續函数，对于满足 $p\in\Gamma^0$ 的 p 的全体，$\theta(p)$ 在单位圆周上构成圆弧 I。

其次，命 $f(z)$ 的反函数为 $\psi(w)$，对于满足 $\theta\in I$ 的任意 θ，給定满足 $|w_n|<1$ $(n=1, 2, \cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty} w_n=e^{i\theta}$ 的点列 $\{w_n\}$，連結这些点能够作出位于单位圆内的曲綫 γ'，以 $e^{i\theta}$ 为終点。由定理 2，$\psi(\gamma')$ 为以 $\theta(p)$ 的一个原象（故其原象只有一个）为終点的 D 内曲綫。这样就得出 $D\cup\Gamma^0$ 及单位圆 $\cup I$ 之間的一对一双方連續对应，因此 I 一定是开区間。

又这个定理的特殊情形是 D 的边界系由一条簡单 Jordan 曲綫 Γ 构成时，D 到单位圆内的一对一共形映射，同时給出 $D\cup\Gamma$ 与 $|w|\leqslant 1$ 之間的一对一双方連續变换。

此外，Carathéodory 还証明了 Gauss 平面的单連通有界域 D 能够一对一共形映射到单位圆 $|w|<1$ 内时，D 的边界元素与单位圆周 $|w|=1$ 上的点为一一对应。

3) **Schwarz 引理** H. A. Schwarz 于 1869 年証明了下列簡单的但应用广泛的定理。通常叫做 Schwarz 引理。

定理 4 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内单值正則，且 $f(0)=0$，假定在該处还有 $|f(z)|\leqslant M$ $(0\leqslant M<+\infty)$，則在 $|z|<R$ 内有

$$|f(z)|\leqslant\left(\frac{M}{R}\right)z.$$

特别对于 $0<|z|<R$ 中某个 z 如果等号成立，则 $f(z)\equiv\left(\frac{M}{R}\right)e^{i\theta}z$（其中 θ 为实数常数）。

証明 命 $\varphi(z)=\frac{f(z)}{z}$，则 $\varphi(z)$ 在 $0<|z|<R$ 的任何点处为单值正则，由定义

$$\lim_{z\to 0}\varphi(z)=f'(0).$$

因为这是有穷确定的，故 $\varphi(z)$ 以 $z=0$ 为可去奇点，命 $\varphi(0)=f'(0)$，则 $\varphi(z)$ 在 $|z|<R$ 内到处为单值正則。对于滿足 $0<\rho<R$ 的任意 ρ，因为 $|\varphi(z)|$ 在 $|z|\leqslant\rho$ 的最大值只能在周界 $|z|=\rho$ 上达到，故在 $|z|\leqslant\rho$ 有 $|\varphi(z)|\leqslant\frac{M}{\rho}$. 这里命 $\rho\to R$，则当

$$|z|<R \text{ 时有 } |\varphi(z)|\leqslant\frac{M}{R}.$$

若在滿足 $|z_0|<R$ 的某个 z_0 有 $|\varphi(z)|=\frac{M}{R}$，则由最大值原理有 θ，使 $\varphi(z)\equiv\left(\frac{M}{R}\right)e^{i\theta}$.

这最后結果用 $f(z)$ 表示时显然就是定理 4，又根据这一証明，应注意到当 $|\varphi(0)|=|f'(0)|=\frac{M}{R}$ 时也是一个特殊情形。

4) **映射函数的唯一性** 定理 1 保証存在的共形映射函数一般不是唯一的。为了求出唯一的条件，首先証明关于綫性函数的簡单結果。

定理 5 单位圆内部：$|z|<1$ 到单位圆内部：$|w|<1$ 的一对一共形映射綫性函数可以表示成

$$w=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{\bar{z}_0z-1},\quad |z_0|<1, \tag{17.6}$$

其中 θ 为实数常数。

証明 在(17.6)的右端命 $z=e^{i\varphi}$（φ 为实数），则由于

$$|w|=\left|\frac{e^{i\varphi}-z_0}{\bar{z}_0e^{i\varphi}-1}\right|=\left|\frac{e^{i\varphi}-z_0}{e^{-i\varphi}-\bar{z}_0}\right|=1,$$

显然知道(17.6)把单位圆内部一对一共形地映射到单位圆内部。

反过来，命这样的映射函数为 $w=w(z)$，则在 z 平面有 z_0，使 z_0 的象为 $w=0$，且 $|z_0|<1$。

由假設 $w(z)$ 为綫性函数，故以 $w=\infty$ 为象点的 z 是 z_0 关于单位圆的反演点 $\frac{1}{\bar{z}_0}$。从而 $w(z)$ 的形状是

$$w=\alpha\frac{z-z_0}{z-1/\bar{z}_0}\quad 或\quad w=\alpha\bar{z}_0\frac{z-z_0}{\bar{z}_0z-1},$$

其中 α 为复数常数。因为 $|z|=1$ 时 $|w|=1$，故命 $z=e^{i\varphi}$（φ 为实数）作与上面相同的計算得出 $|\alpha\bar{z}_0|=1$。

以上証明了定理5，但有趣的是应用上述 Schwarz 引理能够去掉定理5的假定"映射函数为綫性函数"。

定理6　单位圆内部到单位圆内部的一对一共形映射函数只限于綫性函数。

証明　命单位圆 $|z^*|<1$ 到单位圆 $|w|<1$ 的一对一共形映射函数为 $w=w(z^*)$，z^* 平面的点 z_0（$|z_0|<1$）的象为 $w=0$。应用

$$z^*=e(z)=\frac{z-z_0}{\bar{z}_0z-1},\quad z=\frac{z^*-z_0}{\bar{z}_0z^*-1}$$

作 $\varphi(z)=w(e(z))$，则 $\varphi(z)$ 把单位圆 $|z|<1$ 一对一共形映射到单位圆 $|w|<1$，且 $\varphi(0)=0$。在 Schwarz 引理中命 $R=M=1$，得出 $|\varphi(z)|\leqslant|z|$。又对于 $\varphi(z)$ 的反函数也可以同样应用 Schwarz 引理，故 $|\varphi^{-1}(w)|\leqslant|w|$。由于 $w=\varphi(z)$，$\varphi^{-1}(w)=z$，故 $|\varphi(z)|\geqslant|z|$。因此結合前面的結果得出 $|\varphi(z)|=|z|$。这就是 Schwarz 引理中等号成立的情形，故

$$\varphi(z)=e^{i\theta}z,\quad w(z^*)=e^{i\theta}\frac{z^*-z_0}{\bar{z}_0z^*-1}.$$

最后，由定理5及定理6可以簡单地求出关于映射函数唯一

性的条件。

定理 7 由 Gauss 平面的有界域 D 到单位圆 $|w|<1$ 的一对一共形映射，能够把 D 內任意給定的点 z_0 及在該点給定的方向映射到滿足 $|w_0|<1$ 的任意給定的点 w_0 及在該点給定的方向，且这样的映射是唯一确定的。

証明 根据定理 5，作由定理 1 得到的映射函数与单位圓映射到单位圓的綫性函数的复合函数，可以把 z_0 映射到 $w=0$，再旋轉任意角后移到 w_0，这样显然証明了定理的前半部。

为了証明定理的后半部，即証明映射的唯一性，假定有两个这样的函数

$$w=\varphi(z),\quad w=\psi(z),$$

用 $\psi^{-1}(z)$ 表示 $\psi(z)$ 的反函数，作

$$f(w)=\varphi(\psi^{-1}(w)).$$

这是把单位圓 $|w|<1$ 映射为自己的一对一共形映射，且 $f(0)=0$，故由定理 6 知道 $f(w)$ 必定取 $e^{i\theta}w$ 的形状（其中 θ 为实数常数）。这时候考慮 $w=0$ 附近的正实軸，这一由 $w=0$ 出发的曲綫經 $f(w)$ 仍然是由 $w=0$ 出发的一条曲綫，在 $w=0$ 的切綫方向与正实軸方向一致，故必定 $\theta=0$，即 $f(w)\equiv w$，由于 $\varphi(\psi^{-1}(w))=w$，故得出 $\varphi(z)\equiv\psi(z)$。

5) **多角形映射，Schwarz-Christoffel 变換** 1) 中介紹的 Riemann 定理是考慮 Gauss 平面的有界域到单位圓內的一对一共形映射問題，这一单位圓当然可以用 Gauss 平面的上半平面代替。为此取綫性函数

$$w=e^{i\theta}\frac{\zeta-\alpha}{\zeta-\bar{\alpha}} \tag{17.7}$$

（其中 α 为滿足 $\Im\alpha>0$ 的任一点，θ 为实数常数），就能够把 w 平面的单位圓 $|w|<1$ 映射为 ζ 平面的上半平面。多角形的內部虽

是有界閉集，它的边界卽多角形的周界却是有穷个綫段构成的，映射成后者（卽映射成上半平面）或許較为方便。

命給定的多角形在 z 平面，用 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n\geqslant 3)$ 表示它的頂点，頂点的順序是按反时針方向排列的。它的內部根据定理 1 能够一对一共形映射到單位圓 $|w|<1$ 內，更由 (17.7) 能够映射到 ζ 平面的上半平面。命映射函数为

$$z=f(\zeta). \tag{17.8}$$

根据定理 3，这个函数連周界包括在內是一对一双方連續的（其中 ζ 考慮在复数球面上），$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 与 ζ 平面上的 n 个点对应。不失普遍性，可設

$$-\infty<a_1<a_2<\cdots<a_n<+\infty, \quad A_i=f(a_i).$$

这时候，給定 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，求 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 虽然复杂，但給定了 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 及多角形的內角，求 $A_1, A_2, \cdots, A_n$（及映射函数 $f(\zeta)$）則比較容易。Schwarz 与 Christoffel 在比較早的时期（1870 年左右）已經給出了解答，今介紹如下。

先命 $\pi\alpha_i (0<\alpha_i<2, i=1, 2, \cdots, n)$ 表示多角形 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 頂点 A_i 处的內角，則

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=n-2, \tag{17.9}$$

事实上，$n=3$ 时自然 (17.9) 成立。一般情形由 § 8 中 2) 的方法知道，在任意的多角形联結适当的两个頂点，如果这一联綫除去两个端点外其余的部分全在多边形內，則原多角形被分成两个多角形，每一多角形的頂点都比原多角形为少，再由归納法卽可推出 (17.9) 成立。

$f^{-1}(z)$ 給出綫段 $A_i, A_{i+1} (i=1, 2, \cdots, n-1)$ 到 ζ 平面实軸上綫段 a_i, a_{i+1} 的一对一双方連續变换。今再在 z 平面上过 A_i 及 A_{i+1} 两点作直綫，并作与多角形 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 关于这一直綫对称的多角形 $(A_1', \cdots, A_{i-1}', A_i, A_{i+1}, A_{i+2}', \cdots, A_n')$，多角形內

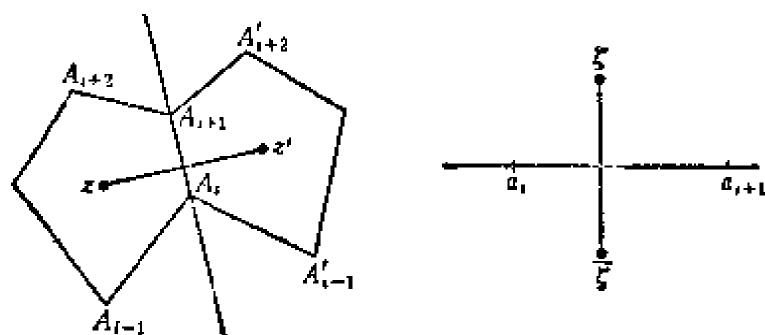


图　17.2

的一切点 z 关于直綫 A_i, A_{i+1} 对称的点設是 z'. 作 $\zeta=f^{-1}(z)$ 的共軛复数 $\bar{\zeta}$,与 z' 对应的函数 $z=f_1(\zeta)$,于是 $z'=f_1(\bar{\zeta})$, $f_1(\zeta)$ 把 ζ 平面的下半平面一对一共形映射到多角形 $(A'_1, \cdots, A'_n)$内。它在綫段 a_i, a_{i+1} 上連續，故由 Painlevé 定理 (§ 12 的 2)) 在綫段 a_i, a_{i+1} 也是正則的(两端点除外)。因此合幷 $f(\zeta)$, $f_1(\zeta)$ 考慮时，得出 ζ 平面的自全部除去实軸 $(-\infty, a_i)$, $(a_{i+1}, +\infty)$ 部分所余的域 D_i 到 $2n-2$ 边形 $(A_1, A_2, \cdots, A_i, A'_{i-1}, \cdots, A'_{i+2}, A_{i+1}, A_{i+2}, \cdots, A_n)$ 内部的一对一共形映射函数，用 $g(\zeta)$ 表示这个函数，則 $g'(\zeta)$在上述 D 内 $g'(\zeta)\neq 0$. 因此,还有

1°) $g''(\zeta)/g'(\zeta)$在 D单值正則。

其次,再用 $w=w(z)=(z-A_i)^{\frac{1}{\alpha_i}}$ 作

$$\varphi(\zeta)=w\{g(\zeta)\}, \tag{17.10}$$

則 A_{i-1} 与 A'_{i-1} 映射到同一个点，$\varphi(\zeta)$在 D的边界的一部分 a_{i-1}, a_i 之間也連續，故仍由 Painlevé 定理知在該处单值正則，因此 $\zeta=a_i$ 为 $\varphi(\zeta)$ 的可去奇点。$\zeta\to a_i$ 时 $z\to A_i$, 故 $w\to 0$, 因此 $w=\varphi(\zeta)$在 $\zeta=a_i$ 的邻域可以展成

$$\varphi(\zeta)=c_1(\zeta-a_i)+c_2(\zeta-a_i)^2+\cdots, \tag{17.11}$$

$\varphi(\zeta)$ 在 $\zeta=a_i$ 既是共形的，故 $c_1\neq 0$. 由 $z=g(\zeta)$, $\zeta\in D$, $z=\{\varphi(\zeta)\}^{\alpha_i}+A_i$, $|\zeta-a_i|<\delta\,(\delta>0)$, 对于滿足 $\zeta\in D$, $|\zeta-a_i|<\delta$ 的 ζ 能够計算出 $z''/z'=g''(\zeta)/g'(\zeta)$. 即

$$z' = \alpha_i \{\varphi(\zeta)\}^{\alpha_i - 1} \varphi'(\zeta),$$

$$\varphi'(\zeta) = c_1 + 2c_2(\zeta - a_i) + \cdots,$$

$$z'' = \alpha_i(\alpha_i - 1)\{\varphi(\zeta)\}^{\alpha_i - 2}\{\varphi'(\zeta)\}^2 + \alpha_i\{\varphi(\zeta)\}^{\alpha_i - 1}\varphi''(\zeta),$$

$$\varphi''(\zeta) = 2c_2 + \cdots,$$

故

$$\frac{g''(\zeta)}{g'(\zeta)} = \frac{\alpha_i - 1}{\varphi(\zeta)}\varphi'(\zeta) + \frac{\varphi''(\zeta)}{\varphi'(\zeta)} = \frac{\alpha_i - 1}{\zeta - a_i} + d_0 + d_1(\zeta - a_i) + \cdots.$$

最后这个式子自然連同 D_i 的边界在 $|\zeta - a_i| < \delta$ 成立。并且以上所述，以 a_{i+1} 代替 a_i 也有同样的結論，故下列命題成立。

2°) $g_i''(\zeta)/g_i'(\zeta)$ 在 $|\zeta - a_i| < \delta$ 及 $|\zeta - a_{i+1}| < \delta'$ $(\delta, \delta' > 0)$ 单值，且分别可以展开成

$$\frac{g_i''(\zeta)}{g_i'(\zeta)}[1] = \frac{\alpha_i - 1}{\zeta - a_i} + d_0 + \cdots, \text{ 及 } \frac{d_{i+1} - 1}{\zeta - a_{i+1}} + d_0' + \cdots.$$

D_i 及 D_{i+1} 共有 a_{i+1} 邻域而属于上半平面的部分，$g_i''(\zeta)/g_i'(\zeta)$ 在該处取与 i 无关的同一数值，故結果 2°) 在下半平面（每个 a_{i+1} $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 的邻域两个在重迭着）仍取与 i 无关的同一数值（因此可以把足碼 i 去掉）。欲知在 $\zeta = \infty$ 的情况，可在 (17.7) 中考虑点 $w = e^{i\theta}$，于是，$g''(\zeta(w))/g'(\zeta(w))$ 在 $w = e^{i\theta}$ 正則，从而 $g''(\zeta)/g'(\zeta)$ 在 $\zeta = \infty$ 等于 0。

这样由 Liouville 定理，有常数 d 使

$$\frac{g''(\zeta)}{g'(\zeta)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i - 1}{\zeta - a_i} + d, \tag{17.12}$$

由上面最后的注意知道 $d = 0$。

在 ζ 平面的实軸上任意取异于 a_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的一点 ζ_0，例如选定 $-\infty < \zeta_0 < a_1$，取由 ζ_0 出发在 ζ 上半平面到达 ζ 的积分路綫 γ，沿 γ 积分 (17.12)，有

---

[1] g_i 表示截至此处对固定 i 得到的 g。——譯者注

$$\log g'(\zeta)-\log g'(\zeta_0)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-1)\log(\zeta-a_i)+\alpha, \quad (17.13)$$

其中左端的 log 可任意确定 $\log g'(\zeta_0)$ 的分支，至于 $\log g'(\zeta)$ 则取沿 γ 开拓所得的分支。右端的 $\log(\zeta-a_i)$ 与 i 无关地，例如定为 $\log 1=0$. 这样 $\zeta=\zeta_0$ 时由于 $\Im\log(\zeta_0-a_i)=\pi i$, 由 (17.9) 命 $\alpha=2\pi i$ 即可。

这样确定了 $(\zeta-a_i)^{\alpha_i-1}$ 的分支后，由 (17.13) 得出

$$g'(\zeta)=g'(\zeta_0)\prod_{i=1}^{n}(\zeta-a_i)^{\alpha_i-1}. \quad (17.14)$$

沿原来的积分路綫再积分 (17.14) 一次，即得出

$$z=g(\zeta)=g'(\zeta_0)\int_{\zeta_0}^{\zeta}(\zeta-a_1)^{\alpha_1-1}(\zeta-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(\zeta-a_n)^{\alpha_n-1}d\zeta$$
$$+g(\zeta_0), \quad (17.15)$$

这就是欲求的映射函数。$g(\zeta_0)$ 为多角形的边 A_nA_1 上与 ζ_0 对应的一点。綜合以上所述，得出下列 Schwarz-Christoffel 定理。

定理 8 z 平面上有 n 个顶点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的多角形(其中顶点的顺序是按反时針方向的)，它的内部一一对一共形映射到 ζ 平面的上半平面，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 各 (經推广了的变换) 映射到满足 $-\infty<a_1<a_2<\cdots<a_n<+\infty$ 的 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 設映射函数为 $z=g(\zeta)$，它由 (17.15) 給出。其中 $\alpha_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 为多角形在顶点 A_i 处的内角被 π 除后的数值，又 $(\zeta-a_i)^{\alpha_i-1}$ 的分支是

$$(\zeta-a_i)^{\alpha_i-1}=e^{(\alpha_i-1)\log(\zeta-a_i)}$$

中 log 在 ζ_0 的分支与 i 无关任意取定的相同分支。

公式 (17.15) 通常叫做 **Schwarz-Christoffel 变换**。又在这一公式中可不失普遍性使 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 之一，例如 a_n 与 $\zeta=\infty$ 一致也不难，为此在公式 (17.15) 中作变数替换

$$\zeta-a_n=1/\zeta^*,$$

把 ζ 映射到 ζ^* 时，$a_i (i=1, 2, \cdots, n-1)$ 映射到 $1/(a_i-a_n)$, a_n 則

映射到∞。

§18 复連通域的共形映射

1) 边界的化簡，解析閉曲綫 在§17中我們已經知道Gauss平面的有界单連通域都能够一对一共形映射到单位圓内部，下一步就考慮复連通域的情况。但无穷多連通的情况相当复杂，故这里只討論有穷复連通的情形。由所得的結果知道这一情形与单連通域不同，可认作标准的图形有好多种，每种都是同样很好用的，所以取舍选擇比較困难，因此这里只介紹其中的一种（見§8的定理3）。

給定Gauss平面上的域 D，考慮是否可以将 D 一对一共形映射到某个簡单标准图形 Δ 的問題，不一定由 D 本身出发，由 D' 出发也可以，这里 D' 系任意的 D 的一对一共形映射域。在这样的意义下，我們可以把 D' 的边界变为相当簡单的。首先作定义，取圓周，例如单位圓：$|z|=1$，将包含这个圓周的域 $1-\varepsilon<|z|<1+\varepsilon$，$\varepsilon>0$ 一对一共形映射到其他域时，圓周 $|z|=1$ 的象曲綫叫做**解析閉曲綫**。命Gauss平面給定的 n 連通域边界的連通成分为 $C_1, C_2, \cdots, C_n$，可以先把 $C_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 中只由一点构成的去掉，而考察其余的。原因是将 D 一对一共形映射到 D'，D' 显然也是 n 連通域，它边界的連通成分 $C'_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 則由这映射及 C_i 确定。若 C_i 只由一点构成，則反映射函数具可去奇点，因此 C'_i 也是由一点构成的。这样 $D\cup C_i$ 与 $D'\cup C'_i$ 为一对一共形的。

即不失普遍性，可假定 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的每一个都是至少有两点的連續体。

定理 1 Gauss平面的 $n(n\geqslant 2)$ 連通有界域 D 的边界的連通成分都至少包含两个点的时候，D 能够一对一共形映射到边界由

n 个解析閉曲綫构成的有界域 D'.

証明 命 D 的边界的連通成分为 $C_1, C_2, \cdots, C_n$, 其中的一个,設是 C_n, 包含离原点最远的边界点。因此,其他的 $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ 都在 C_n 的內部。

第一步。先把构成 C_n 內部的单連通域, 应用 §17 的定理 1, 一对一共形映射到单位圓內部。根据这个变換, C_n 映射到单位圓 C'_n; $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ 映射到单位圓內的連續体 $C'_1, C'_2, \cdots, C'_{n-1}$; D 则映射到以这些作边界的单位圓內的域 D'. 第二步。把 C'_{n-1} 的外部(C'_{n-1} 的余集的連通成分中含 ∞ 点的部分)一对一共形映射到单位圓的外部: $|w|>1$, 且使 ∞ 对应 ∞. 这样映射之所以存在,是由于 C'_{n-1} 的外部为以 C'_{n-1} 作边界(数球面上)的单連通域, 由 §17 的定理 1, 能够一对一共形映射到单位圓內部: $|w|<1$. 若 ∞ 的象点是 w_0, 則 $(w\bar{w}_0-1)/(w-w_0)$ 显然就是欲求的映射。这样 C'_n 变換到一个解析閉曲綫 C^2_n; C'_{n-1} 变換到单位圓 C^2_{n-1}; $C'_1, C'_2, \cdots, C'_{n-2}$ 各变換到单位圓外的有界連續体 $C^2_1, C^2_2, \cdots, C^2_{n-2}$; D' 則变換到以这些連續体为边界且包圍在 C^2_n 內的域 D^2.第三步。以下用 C^2_{n-2}, 重复第二步的方法。这样接連作 n 次即可終止, C^n_1 为单位圓, $C^n_2, C^n_3, \cdots, C^n_n$ 全部在它的外边, D^n 是以这些解析閉曲綫为边界且由 C^n_n 包圍的 n 連通域,域 D^n 就是欲求的。

2) **調和測度** 对于上述 Gauss 平面上由 n 个彼此互斥的解析閉曲綫 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 所包圍的 n 連通有界域 D, 由 §16 定理 4 能够作出 Dirichlet 問題的解。固定 k 为 $1, 2, \cdots, n$ 中的一个值,考察在 C_k 上等于 1, 在其他的 $C_1, C_2, \cdots, C_{k-1}, C_{k+1}, \cdots, C_n$ 上等于 0 的边界值,則它显然在全边界上連續。这时 Dirichlet 問題的解 $\omega_k(z)$ 叫做 C_k 对于域 D 的**調和測度** (harmonic measure). $z\in D$ 时自然 $0<\omega_k(z)<1$, 今再叙述 $\omega_k(z)$ 所具有的两个重要性质。

首先，$\sum_{i=1}^{n}\omega_k(z)$ 在 D 内的任何点为調和，边界值到处等于1，故必定恒等于1。即

$$\omega_1(z)+\omega_2(z)+\cdots+\omega_n(z)\equiv 1. \qquad (18.1)$$

其次，为了了解它的共軛調和函数的情况，不妨命 C_n 是它的最外边的边界，而其他的 $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ 都包含在 C_n 內。用 $\omega_k^*(z)$ 表示 $\omega_k(z)$ 的共軛調和函数，它不一定是单值，由定理10(§5)，当固定域 D 內一点 z_0 时，在該处的值 $\omega_k^*(z_0)$ 由 z_0 以及由 z_0 出发到 z 的路綫决定，两条路綫中間如果沒有包含边界点則取同一数值，沿反时針方向繞边界一周的路綫所得 $\omega_k^*(z_0)$ 的值与原始值的差

$$\alpha_{kj}=\int_{C_{kj}}d\omega_k^*(z) \quad (j=1, 2, \cdots, n-1) \qquad (18.2)$$

是它的周期，由下列定理知道这些数值不等于0.

定理2 用 $n-1$ 个实数常数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}$ 作函数 $g(z)=\lambda_1\omega_1(z)+\lambda_2\omega_2(z)+\cdots+\lambda_{n-1}\omega_{n-1}(z)$，命 $h(z)$ 表示 $g(z)$ 在 D 內的共軛調和函数，若

$$f(z)=g(z)+ih(z)$$

在 D 内单值，则必定

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0.$$

証明 命 $f(z)$ 在 D 內单值，考察由 $w=f(z)$ 所产生的象，$f(z)$ 的边界值的实部在 $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ 上各为实数常数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}$，在 C_n 上等于0，故命 $w=u+iv$ 表示边界值的点分别在滿足 $u=0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ 的 n 个平行于虛軸的直綫上。今命 w_0 为此等直綫外的任一点，在 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的邻近且在 D 内作解析閉曲綫 $C_1', C_2', \cdots, C_n'$，使它們的上边 $f(z)$ 的值能够和上边的直綫充分接近。z 在 $C_i'(i=1, 2, \cdots, n)$ 上 $f(z)$ 所描的曲綫不包圍 w_0，对于这个曲綫 $\arg(f(z)-w_0)$ 的差为0. 另一方面，在全部 $C_i'(i=1, 2, \cdots, n)$ 包圍的域 D' 內 $f(z)=w_0$ 的根只有有穷个，用

不过这些根的折綫把 D' 改成单連通域，在这个折綫上 $\arg(f(z)-w_0)$ 的差由于往返相消也是 0，結果由幅角原理（§11 定理 8），$f(z)-w_0=0$ 的根的个数是 0。即 $f(z)$ 所取的值必定全部都在上述的 n 个直綫上。只要 $f(z)$ 不是常数，则与域不变原理違背。$f(z)$ 既是常数，它的实部也是常数。取由 $C_j(j=1, 2, \cdots, n-1)$ 上一点出发到 C_n 上一点終止的 D 内曲綫，則 $f(z)$ 的实部在 C_j 上为 λ_j，在 C_n 上为 0，由于 $f(z)$ 是常数，故 $\lambda_j=0$。

$f(z)$ 是单值的条件，即 $h(z)$ 在 D 内单值的充要条件为 $h(z)$ 在 $C_j(j=1, 2, \cdots, n-1)$ 上的周期都是 0。換句話說，下列方程組成立：

$$\lambda_1\alpha_{1j}+\lambda_2\alpha_{2j}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,j}=0\ (j=1, 2, \cdots, n-1).$$

由定理 2 知道这組联立方程的根只限于 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$。即 $(n-1)$ 行 $(n-1)$ 列的行列式 $|\alpha_{kj}|$ 不为 0，故非齐次方程

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1\alpha_{11}+\lambda_2\alpha_{21}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,1}=2\pi,\\ \lambda_1\alpha_{12}+\lambda_2\alpha_{22}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,2}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda_1\alpha_{1,n-1}+\lambda_2\alpha_{2,n-1}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,n-1}=0\end{array}\right\}\quad(18.3)$$

的解 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1})$ 一定存在。这样，解析函数（多值）$\omega_k(z)+i\omega_k^*(z)$ 繞全部 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的周期和等于沿不繞 $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ 的閉路的积分，故由 Cauchy 基本定理有

$$\alpha_{k,1}+\alpha_{k,2}+\cdots+\alpha_{k,n}=0\quad(k=1, 2, \cdots, n-1).\quad(18.4)$$

把 (18.3) 纵向相加，再应用 (18.4)，得出

$$\lambda_1\alpha_{1,n}+\lambda_2\alpha_{2,n}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,n}=-2\pi.\quad(18.5)$$

用这样的 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}$ 作 $g(z)$，再作 $f(z)=g(z)+ih(z)$，則对于 C_1, C_n 的周期各为 $\pm 2\pi i$，对于 $C_2, C_3, \cdots, C_{n-1}$ 的周期为 0。再作 $F(z)=e^{f(z)}$，得 D 内的单值函数。

3) **同心圓弧域** 自两个同心圓所作的圓环域 $0<R_1<|w|$

$<R_2<+\infty$ 內去掉有穷个同心圆弧，所余的域叫做**同心圓弧域**。本小节的主要目的是証明下列定理。

定理 3 在 Gauss 平面上以 n 个 $(n\geqslant 2)$ 連續体为边界的 n 連通域 D，能够由 $w=F(z)$，$z\in D$ 一对一共形映射到自圓环域 $1<|w|<e^{\lambda_1}$ 中除去 $n-2$ 个同心圓 $|w|=e^{\lambda_i}(i=2, 3, \cdots, n-1)$ 上的圓弧所余的同心圓弧域 $\varDelta$. 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}$ 是由 D 决定的常数，且 $0<\lambda_j<\lambda_1(j=2, 3, \cdots, n-1)$.

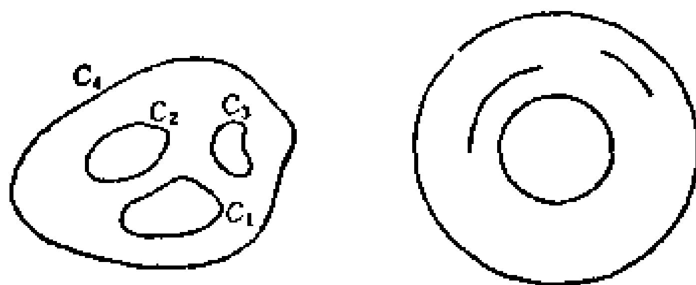


图 18.1

証明 不失普遍性，如 1) 中所述，可以认作构成 D 的边界的連續体 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 都是解析閉曲綫，C_n 是最外部的。于是，欲証定理 3，只須証明 2) 最后考虑的函数

$$F(z)=e^{g(z)+ih(z)}$$

就是定理 3 的映射函数。对于满足 $p\in C_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 的点 p 若当 $z_n\to p(z_n\in D)$ 时取满足 $F(z_n)\to\alpha$ 的 α 值为 $F(z)$ 在 p 处的值，则 $F(z)$ 在 C_k 上所取值的絕对值都是 e^{λ_k}. 但由于这是連通集，故在圓周

$$|w|=e^{\lambda_k}$$

上构成圓周全体或构成一段弧。設 w_0 是不属于 $k=1, 2, \cdots, n$ 所对应的这些弧上的一个点，則 $F(z)=w_0$ 的根 z 的个数可由与 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 充分接近的解析閉曲綫 $C_1', C_2', \cdots, C_n'$ 依下列积分求出(参看§ 11 的 4))：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F'(z)}{F(z)-w_0}dz,\quad \Gamma=C_1'+C_2'+\cdots+C_n'. \qquad (18.6)$$

将 C_k' 写作 C_k 也不至于引起誤会，以下就这样作。因此不論 $F(z)$ 在 $z\in D$ 能否取 w_0 值，首先将积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{F'(z)}{F(z)-w_0}dz \qquad (18.7)$$

計算好。这是 $F(z)$ 繞 $w=w_0$ 时 $F(z)-w_0$ 的幅角的增量，所以当 $|w_0|>e^{\lambda_k}$（其中命 $\lambda_n=0$）时是 0；当 $|w_0|<e^{\lambda_k}$ 时，是与 w_0 无关的常数 γ_k。故計算 γ_k，考察 $w_0=0$ 的情形就可以。这时候，(18.7) 成

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\left\{\frac{d}{dz}\log F(z)\right\}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}d\{g(z)+ih(z)\}.$$

$g(z)$ 是 D 内单値函数，故 $\int_{C_k}dg(z)=0$，剩下的由周期定义有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C_k}dh(z)=\frac{1}{2\pi}\{\lambda_1\alpha_{1k}+\lambda_2\alpha_{2k}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,k}\}$$
$$(k=1,2,\cdots,n).$$

故由 (18.3) 及 (18.5) 随 $k=1,2,\cdots,n$ 各取值 $1,0,0,\cdots,0,-1$.

作好这些准备之后，对于确实

$$F(z)=w_0,\quad z\in D \qquad (18.8)$$

能成立的 w_0，計算方程 (18.8) 的根的个数。分两种情形。

第一种情形。对于任何的 $k=1,2,\cdots,n$，$|w_0|=e^{\lambda_k}$（其中 $\lambda_n=0$）不成立。

(18.8) 的根的个数 $N(w_0)$ 是由 (18.6) 計算的，关于 $C_j(j=2,3,\cdots,n-1)$ 的部分 $\gamma_2=\gamma_3=\cdots=\gamma_{n-1}=0$，所以与 $N(w_0)$ 无关，因而对于 $C_{1\lambda}$ 及 C_n 計算就够了。若 $|w_0|<1$，則 $N(w_0)=\gamma_1+\gamma_n=1-1=0$，若 $1<|w_0|<e^{\lambda_1}$，則 $N(w_0)=\gamma_1=1$，若 $|w_0|>e^{\lambda_1}$，則 $N(w_0)=0$.

由这个結果，更可得出下列事实。若有一个 $k=2,3,\cdots,n-1$

使 $e^{\lambda_k}>e^{\lambda_1}$ 成立，则在 $|w|=e^{\lambda_k}$ 上至少有 $F(z)$ 的一个值，在它的邻域，$F(z)$，$z\in D$ 所取的值构成域，故满足 $|w_0|>e^{\lambda_1}$，$N(w_0)\geqslant 1$ 的 w_0 复盖某一小圆。

这与上述結果矛盾，故 $e^{\lambda_1}\geqslant e^{\lambda_k}(k=2,3,\cdots,n-1)$，即必須 $\lambda_1\geqslant\lambda_k$。完全同样可得 $0\leqslant\lambda_k\leqslant\lambda_1(k=2,3,\cdots,n-1)$。

第二种情形。对于某一个 $k=1,2,\cdots,n$，$|w_0|=e^{\lambda_k}$ 成立。由域不变原理，$F(z)$，$z\in D$ 所取值包含以 w_0 为中心的小圓，对于 $k=1$ 及 $k=n$，与第一种情形矛盾。因此必須 $1<|w_0|<e^{\lambda_1}$。也就是这时候 $1<|w_0|=e^{\lambda_k}<e^{\lambda_1}$（$k$ 是 $2,3,\cdots,n-1$ 中的某一个）。对于这样的 w_0，倘若有满足 $F(z_1)=F(z_2)=w_0$，$z_1\neq z_2$，z_1，$z_2\in D$ 的 z_1，z_2，则以 z_1，z_2 为中心的互斥小圓，分别映射为含 w_0 的域 Ω_1，Ω_2。$\Omega_1\cap\Omega_2$ 是开集，所以 $\Omega_1\cap\Omega_2$ 含点 w，它不在任何 $|w|=e^{\lambda_{k'}}(k'=1,2,\cdots,n)$ 上。这与第一种情形矛盾。即 $|w_0|=e^{\lambda_k}(k=2,\cdots,n-1)$ 的时候，(18.8) 的根也不能有两个或多于两个。

以上已經証完了定理 3。由这个証明知道域 Δ 也必定是 n 連通域，所以 $0<\lambda_k<\lambda_1$，$k=2,3,\cdots,n-1$ 成立。又关于边界 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 以外的对应，則引用 § 17，2）的結果可以簡单地处理如下。由于 D 与 Δ 之間是一对一共形的，故对于满足 $p\in C_k$ 的任意点，用不过 p 的剖綫能够使 D 成为单連通域 D_1。故由定理 3（§ 17），上述映射实际在 p 点也是連續的。又命 Δ_1 为 D_1 的象，把 Δ_1 映射到上半平面，按 § 17 的 5）所用的方法开拓，于是，C_k 是解析閉曲綫时，可以越过 C_k 开拓 $F(z)$。这时候，对于 $C_k(k=2,\cdots,n-1)$ 虽是共形，但就大范圍說，一对一的性质被破坏了。这个方法一般叫做**对称原則**。

又由以上証明知道，若指定 C_1 及 C_n，則 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n(\lambda_n=0)$ 即被决定，故 $F(z)$ 的象除旋轉外唯一确定。描述这个域的量是对于 $k=2,\cdots,n-1$ 的 λ_k 及决定其圓弧两端的角 φ_k'，φ_k''，λ_1 总共

有 $3n-5$ 个，但 φ_k' 中的一个因旋轉可以看作不能确定，故旋轉也考慮在內，則一共有 $3n-6$ 个。由此事实，特別当 $n=2$ 的时候，可以知道，同心圓所构成的圓环域 $0<r_1<|z-a|<r_2<+\infty$ 与 $0<R_1<|z-b|<R_2<+\infty$ 之間有一对一共形关系的充要条件是 $r_2/r_1=R_2/R_1$。这个量必須等于 e^{λ_1}，这因为 λ_1 是应当可以确定的。这时 $\lambda_1=\log(r_2/r_1)$ 叫做它的**模数**(module)。

第7章 半純函数

§19 Picard 定理

半純(或称有理型)函数是在 Gauss 平面上到处至多具极点的单值复元函数。如果在复数球面考慮,則 $z=\infty$ 或是正則点,极点或一般的孤立本性奇点。說明在孤立本性奇点邻域函数情况的定理是 Picard 定理,已在 §11 中作了詳細的叙述,但是在那里沒有給出証明,当在本节給出。为此先作准备,从 Bloch 定理开始。

1) **Bloch 定理** A. Bloch 在 1926 年証明了下列有广泛应用的定理。

定理 1 (Bloch) 在 $|z|<1$ 內展成形如

$$w=f(z)=a_0+z+a_2z^2+\cdots \tag{19.1}$$

的函数 $w=f(z)$ 的 Riemann 面(正确地說,解析图形)包含着半徑不小于常数 B 的单叶圓板,此常数 B 与 $f(z)$ 无关。

这就是通常所說的 Bloch 定理,为了証明这个定理,先証明下列两个引理。

引理 1 把单位圓內部: $|z|<1$ 共形映射到单位圓內部: $|\zeta|<1$ 的函数 $\zeta=\zeta(z)$ 满足下列等式(Poincaré 微分不变式):

$$\frac{|d\zeta|}{1-|\zeta|^2}=\frac{|dz|}{1-|z|^2}. \tag{19.2}$$

証明 我們已經知道上述共形映射都可写成

$$\zeta=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{\bar{z}_0z-1}\ (\theta\text{ 为实数常数})。 \tag{19.3}$$

因此

$$\frac{d\zeta}{dz}=e^{i\theta}\frac{-(1-|z_0|^2)}{(\bar{z}_0z-1)^2},$$

$$|\bar{z}_0 z-1|^2-|z-z_0|^2=(\bar{z}_0 z-1)(z_0\bar{z}-1)-(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)$$
$$=(1-|z|^2)(1-|z_0|^2),$$

故

$$(1-|z|^2)\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|=\frac{(1-|z|^2)(1-|z_0|^2)}{|\bar{z}_0 z-1|^2}=1-\frac{|z-z_0|^2}{|\bar{z}_0 z-1|^2}$$
$$=1-|\zeta|^2,$$

即

$$\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|=\frac{1-|\zeta|^2}{1-|z|^2}.$$

引理 2 設函数 $w=g(z)=z+c_2z^2+\cdots$ 在 $|z|<R$ 单值正則，且 $|g'(z)|<M$，則 $g(z)$ 在圓 $|z|<\frac{R}{M}$ 单叶，且这个圓的象域包含以原点为中心、半徑为 $d=MR\left\{1+(M^2-1)\log\left(1-\frac{1}{M^2}\right)\right\}$ 的圓。

証明 令命

$$h(z)=M\frac{g'(z)-1}{g'(z)-M^2},$$

則 $h(z)$ 在 $|z|<R$ 内单值正則且 $h(0)=0$。另一方面，取

$$w=M\frac{\zeta-1}{\zeta-M^2}$$

形状的綫性函数，把圓 $|\zeta|=M$ 映射成 $|w|=1$，当 $|z|<R$ 时 $|h(z)|\leqslant 1$。故由 Schwarz 引理（§ 17 定理 4）有 $|h(z)|\leqslant\frac{|z|}{R}$。即

$$\left|\frac{g'(z)-1}{g'(z)-M^2}\right|\leqslant\frac{1}{M}\frac{|z|}{R}.$$

因此对于 $|z|\leqslant r\ (0<r<R)$ 有

$$M\frac{R-Mr}{RM-r}\leqslant\Re\{g'(z)\}\leqslant|g'(z)|. \tag{19.4}$$

所以当 $|z|<\frac{R}{M}$ 时，(19.4)的左边 >0，故 $\Re\{g'(z)\}>0$。因此根据 § 5 的定理 5，$g(z)$ 在那里单叶。在 $|z|=\frac{R}{M}$ 的象的曲綫上，命

$w_0=g(z_0)$ 为与原点 $w=0$ 距离最近的一个点，联 w_0 与 $w=0$ 的綫段的原象为 L，当 $|z|=\frac{R}{M}$ 时，由(19.4) $g(z)$ 满足

$$|g(z)|\geqslant|g(z_0)|=|g(z_0)-g(0)|=\left|\int_L g'(z)dz\right|$$

$$\geqslant\int_L|g'(z)||dz|\geqslant\int_L M\frac{R-Mr}{RM-r}|dz|\geqslant M\int_0^{R/M}\frac{R-Mr}{RM-r}dr$$

$$=MR\left\{1+(M^2-1)\log\left(1-\frac{1}{M^2}\right)\right\}.$$

Bloch 定理(定理 1)**的証明** 先考察 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant1$ 正則的情形。这时考察

$$N(z)=(1-|z|^2)|f'(z)|.$$

由假設，这函数在 $|z|\leqslant1$ 連續且 $N(0)=1$，当 $|z|=1$ 时 $N(z)=0$。故有满足 $|z_0|<1$ 的点 z_0 存在，使 $N(z)$ 在 z_0 的值是最大值 $N=\max N(z)$。即 $|z_0|<1$，$N=(1-|z_0|^2)|f'(z_0)|$，对于 $|z|<1$ 恒 $N(z)\leqslant N$。因为 $N(0)=1$ 显然 $N\geqslant1$。令命

$$\zeta=\frac{z-z_0}{\bar{z}_0z-1},\quad g(\zeta)=\frac{f(z)-f(z_0)}{N},\tag{19.5}$$

由于 $|z|<1$ 与 $|\zeta|<1$ 之間是一对一共形的，故 $g(\zeta)$ 在 $|\zeta|<1$ 单值正則且 $g(0)=0$，再由引理 1 有

$$|g'(\zeta)|=\left|\frac{f'(z)}{N}\right|\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|=\left|\frac{f'(z)}{N}\right|\frac{1-|z|^2}{1-|\zeta|^2}\leqslant\frac{1}{1-|\zeta|^2},\tag{19.6}$$

$$g'(0)=\frac{f'(z_0)}{N}(1-|z_0|^2)=1.$$

故由(19.6)知道，当 $|\zeta|<\frac{1}{2}$ 时有

$$|g'(\zeta)|<\frac{4}{3}.$$

再由引理 2 $\left(这时\ R=\frac{1}{2},\ M=\frac{4}{3}\right)$，$w=g(\zeta)$ 的象域包含以 $w=0$

为中心、半徑为 $d=\frac{2}{3}\left\{1+\frac{7}{9}\log\frac{7}{16}\right\}>0.23\cdots$ 的圓。ζ 与 z 之間在 $|\zeta|<\frac{1}{2}$ 是一对一共形的，且 $N\geqslant 1$，故由(19.5) $f(z)$（在它的解析图形上）也包含着以 $f(z_0)$ 为中心、d 为半徑的单叶圓。

其次，一般 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 正則的情形，考察

$$f_1(z)=2f\left(\frac{z}{2}\right).$$

$f_1(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 正则，更因 $f_1(0)=0, f_1'(0)=1$，故对于 $|z|<1$，$f_1(z)$ 的象包含半徑为 0.23 的单叶圓板。因此，$f(z)$ 的象包含半徑为前者的 $\frac{1}{2}$ 即 $0.11\cdots$ 的圓板。

上面已經証明了 Bloch 定理。这定理中常数 B 的最优值，即 B 的上确界叫做 **Bloch 常数**，用 $\mathfrak{B}$ 表示之。由于函数

$$w=\tan^{-1}z=z-\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5-\cdots, |z|<1,$$

把 $|z|<1$ 映射到带状域 $|\Im w|<\frac{\pi}{4}$，且 $w=\pm\frac{i\pi}{4}$ 是它的支点，故 $\mathfrak{B}<\frac{\pi}{4}=0.78\cdots$。

Ahlfors 于 1938 年証明了 $\mathfrak{B}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}=0.433\cdots$，Ahlfors 与 Grunski 于 1937 年証明了 $\mathfrak{B}\leqslant 0.47\cdots$，它的正确数值还不知道，确定这一正确的数值是遺留下来的重要問題之一。

2) **Schottky 定理** Schottky 于 1904 年証明了下列定理。

定理 2 (Schottky) $f(z)=c_0+c_1z+\cdots$ 在 $|z|<R$ 单值正則，且 $f(z)\neq 0, f(z)\neq 1$。于是，有与 $f(z)$ 无关的常数 $0\leqslant\theta<1$，及定义于 $|w|<\infty$ 的只取正实值的函数 $S(w,\theta)$，当 $|z|\leqslant\theta R$ 时有

$$|f(z)|<S(c_0,\theta). \tag{19.7}$$

Landau 用 Bloch 定理，給这定理一个簡单的初等証法，今介紹如下。

引理 假定$f(z)=c_0+c_1z+\cdots$在$|z|<R$单值正則，$f(z)\neq 0$，$f(z)\neq 1$，依次命

$$h(z)=\frac{1}{2\pi i}\log f(z), \tag{19.8}$$

$$\varphi(z)=\sqrt{h(z)},\ \psi(z)=\sqrt{h(z)-1}, \tag{19.9}$$

$$F(z)=\log\{\varphi(z)-\psi(z)\}, \tag{19.10}$$

則$F(z)$在$|z|<R$內不能取下列各值：

$$\gamma=\pm\log(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})+\frac{n\pi i}{2},\quad \left.\begin{array}{l} m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots, \\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots. \end{array}\right\} \tag{19.11}$$

証明 在$|z|<R$內$f(z)\neq 0$，故$h(z)$是定义于$|z|<R$的正則函数。定log的分支以确定$h(0)$的值，則由单值性定理知道是单值的。例如可以由$h(0)=\log|c_0|+i\arg c_0$，$-\pi<\arg c_0\leqslant\pi$决定之。因为$f(z)\neq 1$，故$h(z)\neq 0$，$\pm1$，$\pm2$，$\cdots$，特别$h(z)\neq 0$，$1$，故$\varphi(z)$，$\psi(z)$在$|z|<R$正則。$\varphi(0)$，$\psi(0)$則例如由$\Im\varphi(0)$，$\Im\psi(0)\geqslant 0$，$0\leqslant\arg\varphi(0)$，$\arg\psi(0)<\pi$决定。由(19.9)，$\varphi^2(z)-\psi^2(z)=1$，即$\{\varphi(z)-\psi(z)\}\cdot\{\varphi(z)+\psi(z)\}=1$，故絕对不能$\varphi(z)-\psi(z)=0$. 因此$F(z)$在$|z|<R$正則，它的值由$-\pi i<\log\{\varphi(0)-\psi(0)\}\leqslant\pi i$确定的話，則$F(z)$也是单值函数。由上面指出的条件知道$F(0)$与$f(z)$无关，只由$c_0$决定。

今証明单值函数$w=F(z)$决不能等于(19.11)所給的γ值。

事实上，对于滿足$|z|<R$的z假定$F(z)=\gamma$，則

$$\varphi(z)-\psi(z)=e^{\pm\log(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})+\frac{n\pi}{2}i}=(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})^{\pm1}(e^{\frac{\pi}{2}i})^n$$
$$=(\sqrt{m}\pm\sqrt{m-1})i^n.$$

由$\varphi^2(z)-\psi^2(z)=1$得

$$\varphi(z)+\psi(z)=\{\varphi(z)-\psi(z)\}^{-1}=(\sqrt{m}\mp\sqrt{m-1})i^{-n},$$

故

$$\left.\begin{aligned}\{\varphi(z)-\psi(z)\}^2&=(m+m-1\pm2\sqrt{m}\sqrt{m-1})i^{2n},\\ \{\varphi(z)+\psi(z)\}^2&=(m+m-1\mp2\sqrt{m}\sqrt{m-1})i^{-2n},\end{aligned}\right\}\quad(19.12)$$

以及

$$2\{\varphi(z)-\psi(z)\}\{\varphi(z)+\psi(z)\}=2,\quad i^{2n}=i^{-2n}=(-1)^n.$$

更由于

$$\varphi(z)=[\{\varphi(z)-\psi(z)\}+\{\varphi(z)+\psi(z)\}]/2,$$

故

$$\begin{aligned}h(z)=\varphi^2(z)=[\{\varphi(z)-\psi(z)\}^2+\{\varphi(z)+\psi(z)\}^2\\ +2\{\varphi(z)-\psi(z)\}\{\varphi(z)+\psi(z)\}]/4.\end{aligned}$$

把(19.12)的值代入,得

$$=[(-1)^n\{2(2m-1)\}+2]/4,\qquad(19.13)$$

故

$$2\pi i h(z)=(-1)^n(2m-1)\pi i+\pi i,$$

从而

$$f(z)=e^{(-1)^n(2m-1)\pi i}\cdot e^{\pi i}=(-1)^{\pm1}(-1)=1.$$

这与題設矛盾。

【注意】 上述 $F(z)$ 不取的值 $\gamma=\pm\log(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})+\frac{n\pi i}{2}$, 当 $m=1$ 时 $\Re\gamma=0$, 其实部相邻值之差为

$$\begin{aligned}&\log(\sqrt{m+1}+\sqrt{m})-\log(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})\\ &=\log\left\{1+\frac{2}{(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})(\sqrt{m+1}+\sqrt{m-1})}\right\}.\end{aligned}$$

$m=1$ 时最大,等于 $\log(\sqrt{2}+1)<\log e=1$, 至于这些值的虚部则依等距离 $\frac{\pi}{2}$ 排列。因此与这些点 γ 相距最远点的距离应小于

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\pi^2}{16}}<\sqrt{\frac{7}{8}}<1.$$

Schottky 定理的証明 应用与引理相同的記号,今假定对于满足 $|\zeta|<\theta R$ 的 ζ, $F'(\zeta)\neq0$. 命

$$W(z)=\frac{F(\zeta+(1-\theta)Rz)}{(1-\theta)RF'(\zeta)}=a_0+z+\cdots,$$

则 $W(z)$ 在 $|z|<1$ 正则，$W'(0)=1$，故具右端的展开。由引理，$W(z)$在 W 平面上的象域不能包含半徑为 $\frac{1}{\{(1-\theta)R|F'(\zeta)|\}}$ 的圆，故由 Bloch 定理，$B<\frac{1}{\{(1-\theta)R|F'(\zeta)|\}}$ 或

$$|F'(\zeta)|<\frac{1}{(1-\theta)RB}. \tag{19.14}$$

这不等式沒有最初的假設(即 $F'(\zeta)\neq 0$)时也显然成立。

今命 $|z|<\theta R$，由原点到 z 作直綫，沿直綫积分

$$F(z)=F(0)+\int_0^z F'(\zeta)d\zeta,$$

由此得

$$|F(z)|\leqslant|F(0)|+\int_0^z|F'(\zeta)||d\zeta|<|F(0)|+\int_0^{\theta R}\frac{dr}{(1-\theta)RB},$$

即

$$|F(z)|<|F(0)|+\frac{\theta}{(1-\theta)B}. \tag{19.15}$$

由于 $F(0)$ 只是 c_0 的函数，故 (19.15) 的右端可以写成 $S_1(c_0,\theta)$。即当 $|z|<\theta R$ 时，$|F(z)|<S_1(c_0,\theta)$。

另一方面，由(19.8)及(19.9)

$$f(z)=e^{2\pi i h(z)}=e^{2\pi i[\varphi(z)]^2}, \tag{19.16}$$

另外由(19.12)有

$$f(z)=e^{2\pi i[(\varphi+\psi)^2+(\varphi-\psi)^2+2]/4},$$

$$|f(z)|=\left|e^{\frac{\pi}{2}i[(\varphi+\psi)^2+(\varphi-\psi)^2]}\right|.$$

更由(19.10)有 $\varphi-\psi=e^{iF(z)}$，$\varphi+\psi=e^{-F(z)}$。故最后由 (19.15) 有

$$|f(z)|=\left|e^{\frac{\pi i}{2}(e^{2iF(z)}+e^{-2iF(z)})}\right|\leqslant e^{\frac{\pi}{2}|e^{2iF(z)}+e^{-2iF(z)}|}$$

$$\leqslant e^{\frac{\pi}{2}(e^{2|F(z)|}+e^{2|F(z)|})}<e^{\pi\exp(2S_1(c_0,\theta))}.$$

因此命

$$S(c_0, \theta)=e^{\pi \exp(2S_1(c_0, \theta))},$$

卽可得出(19.7)。

3) **Picard 定理** 应用 Schottky 定理，就可以由 Casorati-Weierstrass 定理导出 Picard 大定理。今先証明位于后二者之間的下列引理。

引理 設 $f(z)$ 在 Gauss 平面点 a 的，去掉了点 a 的邻域单値正則，a 点是它的本性孤立奇点。于是，任取复数 α 的任意邻域內的值 γ，有趋于 a 的点列 c_n：$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=a$，使

$$f(c_1)=f(c_2)=\cdots=\gamma.$$

引理的証明 先取滿足 $R>\varepsilon_1>\varepsilon_2>\cdots>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ 的任意正实数列 $\{\varepsilon_n\}$，命 α 的任意邻域为 $0\leqslant|w-\alpha|<\varepsilon$，$\varepsilon>0$。由 Casorati-Weierstrass 定理有滿足 $0<|z_1-a|<\varepsilon_1$，$|f(z_1)-\alpha|<\varepsilon$ 的点 $z=z_1$。用 Δ_0 表示圓 $|w-\alpha|<\varepsilon$。由于 $w=f(z)$ 在 $z=z_1$ 单値正則，由域不变原理，以 z_1 为中心取充分小的邻域，$w=f(z)$ 在这邻域中取的值包含一个以 $f(z_1)$ 为中心的充分小的圓，命此圓为 Δ_1。因为 $y=f(z)$ 在 $z=z_1$ 連續，故以 z_1 为中心的圓，可設含在 $0<|z_1-a|<\varepsilon_1$ 內，命 Δ_1 的閉包为 $\bar{\Delta}_1$，可設 $\bar{\Delta}_1\subset\Delta_0$，而 Δ_1 的半徑 δ_1 可假定小于 ε_1。其次，对于 $0<|z-a|<\varepsilon_2$，$|f(z)-\alpha_1|<\delta_1$，应用 Casorati-Weierstrass 定理，重复与上面同样的推导，得出：有滿足 $0<|z_2-a|<\varepsilon_2$，$|f(z_2)-\alpha_1|<\delta_1$ 的点 z_2，及以 z_2 为中心而包含在 $0<|z_2-a|<\varepsilon_2$ 內的圓，它的象內有以 $\alpha_2=f(z_2)$ 为中心的圓 Δ_2：$0\leqslant|w-\alpha_2|<\delta_2<\varepsilon_2$，且滿足 $\bar{\Delta}_2\subset\Delta_1$。以下重复同样的推导，得出：有滿足 $0<|z_n-a|<\varepsilon_n$，$|f(z_n)-\alpha_{n-1}|<\delta_{n-1}$ 的点 z_n，及以 z_n 为中心且包含在 $0<|z_n-a|<\varepsilon_n$ 內的圓，它的象內有以 $\alpha_n=f(z_n)$ 为中心的圓 Δ_n：$0\leqslant|w-\alpha_n|<\delta_n<\varepsilon_n$，且滿足 $\bar{\Delta}_n\subset\Delta_{n-1}$。这样在 w 平面上得出滿足

$$\Delta_0 \supset \bar{\Delta}_1 \supset \Delta_1 \supset \bar{\Delta}_2 \supset \Delta_2 \supset \cdots$$

的圆列，其半徑各为δ_n，由于$0<\delta_n<\varepsilon_n$故$\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$，从而可以确定一个$\bar{\Delta}_n(n=1, 2, \cdots)$的共通点$\gamma$。由于$\gamma$在$\Delta_0$内，所以$|\gamma-\alpha|<\varepsilon$，更由于$\gamma\in\Delta_n$，故一定有满足$0<|c_n-a|<\varepsilon_n$的点$c_n$，使$f(c_n)=\gamma$。

Picard 定理的証明　应用上述引理及Schottky定理，証明"单值函数$f(z)$以$z=a$为孤立本性奇点时，在复数球面上最多除去两个值，对于其余的任何值c，在$z=a$的邻域取无穷多次"。用归謬法証明。为此，假定$f(z)$在$0<|z-a|<\delta$, $\delta>0$，只取复数球面上互异的三个值ω_1, ω_2, ω_3有穷次。这时，可取δ充分小，不失一般性，可以假定$f(z)$在$0<|z-a|<\delta$不取三值中的任一个。这三个值中的两个，例如ω_1, ω_2設是有穷，依ω_3为有穷或∞，分别作函数

$$\varphi(z)=\frac{f(z)-\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\frac{\omega_2-\omega_3}{f(z)-\omega_3} \text{ 或 } \varphi(z)=\frac{f(z)-\omega_1}{\omega_2-\omega_1},$$

则$\varphi(z)$在$0<|z-a|<\delta$单值正则，以$z=a$为孤立本性奇点，且在該处$\varphi(z)\neq 0$, $\varphi(z)\neq 1$。

因此，由引理对于复数γ，有满足$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$, $0<|z_n-a|<\delta$的点列z_n，使

$$\varphi(z_1)=\varphi(z_2)=\cdots=\gamma. \tag{19.17}$$

再命

$$\zeta=\log(z-a);\ z=a+e^{\zeta},\ h(\zeta)=\varphi(z),$$

则$h(\zeta)$是定义于左半平面$\Re\zeta<\log\delta$的单值正则函数，且$h(\zeta)\neq 0, 1$。另一方面，z_n变换为$\zeta_n=\log(z_n-a)$时，ζ_n不能唯一确定，为方便起見，指定$-\pi<\arg\zeta_n\leqslant\pi$，则$\zeta_n$与$z_n$一起确定。由于$\Re\zeta_n=\log|z_n-a|$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\Re\zeta_n=-\infty$。故不失一般性，可以假定对于$n=1, 2, \cdots$, $\Re\zeta_n<-2\pi+\log\delta$。即以$\zeta_n$为中心、$2\pi$为半徑

画圓时，这个圓完全落在 $h(\zeta)$ 的定义域中。因此，命

$$H_n(\zeta)=h(\zeta+\zeta_n) \quad (n=1, 2, \cdots),$$

則 $H_n(\zeta)$ 在 $|\zeta|<2\pi$ 单值正則，且在該处 $H_n(\zeta)\neq 0, 1$。另外，不拘 n 如何，$H_n(0)=h(\zeta_n)=\varphi(z_n)=\gamma$。因此，命 $\theta=1/2$，由 Schottky 定理，当 $|\zeta|\leqslant\pi$ 时有

$$|H_n(\zeta)|<S(\gamma, 1/2).$$

即 $|h(\zeta)|$ 在过 ζ_n 且平行于虛軸、长为 2π 的綫段 ζ_n+it $(-\pi\leqslant t\leqslant\pi)$ 上比 $S(\gamma, 1/2)$ 为小。因此，$|\varphi(z)|$ 在过 z_n 的圓周 $|z-a|=|z_n-a|$ 上小于 $S(\gamma, 1/2)$。$S(\gamma, 1/2)$ 与 n 无关，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n-a|=0$。故 $z=a$ 是 $\varphi(z)$ 的可去奇点，与原設 $z=a$ 不是孤立本性奇点矛盾。

§20 半純函数的值分布

1) **Jensen 公式** 为了考察半純函数的值分布，先証明有用的 Jensen 公式。

定理1 命 R 为正实数 $(0<R<+\infty)$，单值复元函数在 $|z|\leqslant R$ 半純。設 $f(z)$ 在 $|z_0|<R$ 的某个点 z_0，及 $|z|=R$ 圓周上沒有零点和极点。$f(z)$ 在圓 $|z|<R$ 內的零点为 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$，极点为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，都按級重复列入。于是，下列等式成立：

$$\log f(z_0)=iK+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\frac{Re^{i\varphi}+z_0}{Re^{i\varphi}-z_0}d\varphi$$

$$-\sum_{\mu=1}^{m}\log\frac{R^2-\bar{a}_\mu z_0}{R(a_\mu-z_0)}+\sum_{\nu=1}^{n}\log\frac{R^2-\bar{b}_\nu z_0}{R(b_\nu-z_0)} \quad (20.1)$$

(其中 K 为某一实数常数)。

証明 綫性函数

$$\zeta=\frac{R(a-z)}{R^2-\bar{a}z}, \quad |a|<R \quad (20.2)$$

在圆 $|z|<R$ 内只有一个一級零点 $z=a$，故函数

$$F(z)=f(z)\prod_{\mu=1}^{m}\frac{R^2-\bar{a}_\mu z}{R(z-a_\mu)}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{R(z-b_\nu)}{R^2-\bar{b}_\nu z} \qquad (20.3)$$

显然在 $|z|\leqslant R$ 单値正則并且沒有零点，因此 $\log F(z)$ 的一个分支也在 $|z|\leqslant R$ 单値正則。因此由 §9(9.14)的 Villat 公式有

$$\log F(z)=iK+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Re\{\log F(Re^{i\varphi})\}\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}d\varphi. \quad (20.4)$$

但是 $\Re\{\log F(Re^{i\varphi})\}=\log|F(Re^{i\varphi})|$，另外(20.2)中圆周 $|z|=R$ 映射成单位圆周 $|\zeta|=1$，故 $\log|F(Re^{i\varphi})|=\log|f(Re^{i\varphi})|$。因此(20.4)的右端給出了(20.1)的第一項及第二項。

另一方面，$f(z)$ 在 $z=z_0$ 既沒有零点也沒有极点，故由(20.4)的左端把 $\log f(z)$ 分出，其余的移項到右端，卽可得出(20.1)的第三及第四項。

这样就証明了(20.1)，其中 K 为实数常数。

取(20.1)两端的实部，則在定理1所述的假定下，命 $z_0=re^{i\theta}$ $(0\leqslant r<R)$，得

$$\begin{aligned}&\log|f(re^{i\theta})|\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}d\varphi\\&\quad-\sum_{\mu=1}^{m}\log\left|\frac{R^2-\bar{a}_\mu z_0}{R(a_\mu-z_0)}\right|+\sum_{\nu=1}^{n}\log\left|\frac{R^2-\bar{b}_\nu z_0}{R(b_\nu-z_0)}\right|. \qquad (20.5)\end{aligned}$$

在(20.5)中特別当 $m=n=0$ 时，命 $\log|f(re^{i\theta})|=u(r,\theta)$，$\log|f(Re^{i\varphi})|=u(R,\varphi)$，就是 Poisson 公式(参看§9的(9.13))。

另外，在(20.5)中特别地 $z_0=0$ 的时候，立刻得出

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|d\varphi=\log\left(\left|f(0)\frac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_m}\right|R^{m-n}\right), \quad (20.6)$$

它叫做 **Jensen 公式**。

当 $z_0=0$ 是 $f(z)$ 的零点或极点时(其余的全满足定理1的条

件)，設 $f(z)$ 在 $z=0$ 的 Laurent 展开是

$$f(z)=cz^h+c'z^{h+1}+\cdots \quad (c\neq 0,\ h=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots),$$

应用(20.6)于 $\dfrac{f(z)}{z^h}$，立刻得出

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi=\log\left(\left|c\frac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_m}\right|R^{m-n+h}\right). \quad (20.7)$$

2) **Nevanlinna 第一基本定理** 給定全 Gauss 平面上非常数的半純函数 $f(z)$ 及任意复数 w_0，滿足 $f(z)=w_0$ 的 z 值彼此是孤立的，可以用 $z=z_1,\ z_2,\ \cdots$ 表示。为了考察这些值的分布状态，Rolf Nevanlinna 于 1925 年 (Acta Math. t. 46) 引进了下列两个函数 $N(r,f)$，$m(r,f)$。

今命 r 为 $0\leqslant r<+\infty$ 的任意实数。于是，上述 $z_1,\ z_2,\ \cdots$ 在 $|z|\leqslant r$ 的范圍内只有有穷个，命 $n(r,\ w_0)$ 表示它的个数。特别地 $n(0,\ w_0)=h$ $(h\geqslant 1)$ 是展开

$$f(z)-w_0=cz^h+c'z^{h+1}+\cdots \quad (h=1,\ 2,\ \cdots),\quad c\neq 0$$

中的 h，同样 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant r$ 的极点个数用 $n(r,\ \infty)$ 表示，$n(0,\ \infty)=k$ $(k\geqslant 1)$ 是展开

$$f(z)=cz^{-k}+c'z^{-k+1}+\cdots \quad (k=1,\ 2,\ \cdots),\quad c\neq 0$$

中的 k。

今用符号 $\log^+\alpha$ $(\alpha\geqslant 0)$ 表示当 $\alpha\geqslant 1$ 时 $\log^+\alpha=\log\alpha$，当 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 时 $\log^+\alpha=0$。換句話說，可以定义 $\log^+\alpha=\max\{\log\alpha,\ 0\}$。

当 w_0 为有穷数值时，Nevanlinna 定义

$$N(r,\ w_0)=\int_0^r\frac{n(t,\ w_0)-n(0,\ w_0)}{t}\,dt+n(0,\ w_0)\log r, \quad (20.8)$$

$$m(r,w_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\theta})-w_0}\right|d\theta; \quad (20.9)$$

当 $w=\infty$ 时，定义

$$N(r,\ \infty)=\int_0^r\frac{n(t,\ \infty)-n(0,\ \infty)}{t}\,dt+n(0,\ \infty)\log r, \quad (20.10)$$

$$m(r,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta. \qquad (20.11)$$

这里 $N(r, w_0)$ 为 $n(r, w_0)$ 用 $d\log r$ 测定的长度所表示的量，叫做**个数函数**(Anzahlfunktion)；$m(r, w_0)$ 为 $f(z)$ 在圆周 $|z|=r$ 上与 w_0 接近程度的一种平均，叫做**近接函数**(Schmiegungsfunktion)。

$f(z)$ 在 $z=0$ 或許有零点抑极点，可先在 $z=0$ 附近把它展成 Laurent 級数

$$f(z)=cz^h+c'z^{h+1}+\cdots \quad (c\neq 0,\ h=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots),$$

取 $0<r<+\infty$ 时，使圆周 $|z|=r$ 上沒有 $f(z)$ 的零点和极点，而在 $0<|z|<r$ 内設有零点 $a_1, a_2, \cdots, a_m$，及极点 $b_1, b_2, \cdots, b_n$(多重零点或极点按級重复写)，于是由 Jensen 公式(20.7)有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta-\log|c|=\log\left(\frac{r^m}{|a_1|\cdots|a_m|}\ \frac{|b_1|\cdots|b_n|}{r^n}r^h\right).$$

今假定 $|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots\leqslant|a_m|$，则

$$\log\frac{r^m}{|a_1|\cdots|a_m|}=m\log r-\sum_{\mu=1}^{m}\log|a_\mu|$$

$$=m\log r-m\log|a_m|+\sum_{\mu=2}^{m}(\mu-1)(\log|a_\mu|-\log|a_{\mu-1}|)$$

$$=m\log\frac{r}{|a_m|}+\sum_{\mu=2}^{m}\int_{|a_{\mu-1}|}^{|a_\mu|}\frac{n(t,0)-n(0,0)}{t}dt$$

$$=\int_0^r\frac{n(t,0)-n(0,0)}{t}dt.$$

同样有

$$\log\frac{r^n}{|b_1|\cdots|b_n|}=\int_0^r\frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}dt.$$

因此，上式可写成

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta-\log|c|$$

$$=\int_0^r\frac{n(t,0)-n(0,0)}{t}dt-\int_0^r\frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}dt+h\log r$$

$$=N(r,0)-N(r,\infty), \qquad (20.12)$$

另一方面，$\log a = \log^+ a - \log^+\left(\frac{1}{a}\right) \quad (0 < a < +\infty)$，故

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta = m(r,\infty) - m(r,0).$$

(20.12) 可写成

$$N(r,\infty) + m(r,\infty) - \log|c| = N(r,0) + m(r,0). \quad (20.13)$$

于是，R. Nevanlinna 对于半純函数 $f(z)$，命

$$N(r,\infty) = N(r,f), \quad m(r,\infty) = m(r,f), \quad (20.14)$$

$$T(r,f) = N(r,f) + m(r,f), \quad (20.15)$$

称 $T(r,f)$ 为 $f(z)$ 的**特征函数** (characteristic function)。因此，(20.13) 可以写成

$$T\left(r, \frac{1}{f}\right) = T(r,f) - \log|c|. \quad (20.16)$$

导出关系式 (20.16) 时，曾假定半純函数 $f(z)$ 在圓周 $|z| = r$ 上沒有零点与极点，这个假定是不必要的。

事实上，如在 $|z| = r$ 上有零点 $a_1', \cdots, a_k'$，极点 $b_1', \cdots, b_l'$。命

$$f(z) = \prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{z}{a_i'}\right)\prod_{j=1}^{l}\left(1 - \frac{z}{b_j'}\right)^{-1} f_1(z),$$

则 $f_1(z) = cz^h + \cdots$，故上面的推論对于 $f_1(z)$ 完全成立。由 $f_1(z)$ 改回 $f(z)$ 时，$n(r,0)$，$n(r,\infty)$ 虽然变动，但是 $N(r,0)$，$N(r,\infty)$ 却不变，另外

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|1 - \frac{re^{i\theta}}{a_i'}\right|d\theta = 0, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|1 - \frac{re^{i\theta}}{b_j'}\right|d\theta = 0$$

$$(i = 1, 2, \cdots, k; \ j = 1, 2, \cdots, l),$$

故知

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta$$

也不改变，至于前二式容易証明。因命 $a_i' = re^{i\varphi}$，则

$$\left|1-\frac{re^{i\theta}}{re^{i\varphi}}\right| = |e^{i\varphi}-e^{i\theta}| = 2\left|\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right|,$$

把最后的值取对数再积分，即可知道它等于0。

另一方面，对于 $0\leqslant|\alpha|<+\infty$, $0\leqslant|\beta|<+\infty$ 的任意 α, β，容易知道以下二式成立：

$$\log^+|\alpha+\beta|\leqslant\log^+|\alpha|+\log^+|\beta|+\log 2, \tag{20.17}$$

$$\log^+|\alpha\beta|\leqslant\log^+|\alpha|+\log^+|\beta|. \tag{20.18}$$

因此，对于 $|a|<+\infty$ 的任意复数 a 有

$$m(r, f(z)-a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})-a|\,d\theta$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|a|\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log 2d\theta$$

$$=m(r, f)+\log^+|a|+\log 2.$$

重复同样的推导，有

$$m(r, f)=m(r, (f-a)+a)$$

$$\leqslant m(r, f-a)+\log^+|a|+\log 2.$$

合并已得两不等式，

$$m(r, f(z)-a)=m(r, f(z))+\theta\{\log^+|a|+\log 2\}$$

$$(-1\leqslant\theta\leqslant1). \tag{20.19}$$

因此再由(20.16)有

$$N\left(r, \frac{1}{f(z)-a}\right)+m\left(r, \frac{1}{f(z)-a}\right)$$

$$=N(r, f(z))+m(r, f(z)-a)-\log|c|$$

$$=N(r, f(z))+m(r, f(z))-\log|c|+\theta\{\log^+|a|+\log 2\}$$

$$(-1\leqslant\theta\leqslant1).$$

今用定理的形式叙述如下。

定理 2 对于有穷复数 a，假定半純函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 的邻域具下列 Laurent 級数展开：

$$f(z)-a=c_\lambda z^\lambda+c_{\lambda+1}z^{\lambda+1}+\cdots \quad (c_\lambda\neq 0),$$

則

$$T\left(r,\ \frac{1}{f(z)-a}\right)=T(r,f(z))+\theta\{\log^+|a|+\log 2\}-\log|c_\lambda|$$

$$(-1\leqslant\theta\leqslant 1). \tag{20.20}$$

这一定理 R. Nevanlinna 把它叫做关于半純函数值分布的**第一基本定理**。根据这个定理，可以証明：对于$f(z)$施行某种簡单变換，例如綫性变換

$$g(z)=\frac{\alpha f(z)+\beta}{\gamma f(z)+\delta},\quad \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0, \tag{20.21}$$

$T(r,f(z))$与$T(r,g(z))$的差不太大。事实上，当$g(z)$为(20.21)所給定的函数时，命

$$|T(r,f)-T(r,g)|=h(r),$$

則$h(r)$在$0\leqslant r<+\infty$有界。这是由于具有形式(20.21)的綫性变換，系由三种变換：(I) $g(z)=f(z)+h$，(II) $g(z)=kf(z)$，$k\neq 1$以及(III) $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$施行有穷次所构成(参看§3的1))，对于(I)，$N(r,f)=N(r,g)$，$m(r,f)$則由(20.19)，对于(II) $N(r,f)$不变，$m(r,f)$則由(20.18)，对于(III)則由(20.20)，在每一情形$h(r)$均为有界。

3) **Weierstrass-Hadamard 关于因数分解的定理** 为簡单起見先从整函数的情形开始。若$g(z)$为一整函数，則$f(z)=e^{g(z)}$也是一个整函数，且在 Gauss 平面的任何处都沒有零点。这命題的逆命題也成立，卽假定$f(z)$在 Gauss 平面的任何处都沒有零点，則必有整函数$g(z)$，使$f(z)$可以写成$e^{g(z)}$的形式。欲証明后一命題，命$g(z)=\log f(z)$，則$g(z)$在 Gauss 平面上各点正則，任意确定一个在$z=0$的 log 的分支，由单值性定理(§14 定理2)，$g(z)$在全 Gauss 平面单值正則，卽为整函数，$e^{g(z)}=f(z)$也是显然的。

其次，取 Gauss 平面上不以有穷点为聚点的无穷点列或有穷点列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots. \tag{20.22}$$

今証明在 a_n 有指定級的零点的整函数存在，并且确定满足这样条件的函数的一般形式。

不失一般性，把点列 $\{a_n\}$ 依照它們模数的大小排列如

$$|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \cdots \leqslant |a_n| \leqslant \cdots, \tag{20.23}$$

其中的等号有的代表在这一点的級。特別地可設 $a_1=a_2=\cdots=a_m=0<a_{m+1}$. 假定 $f(0)\neq 0$, 則命 $m=0$. $m>0$ 的时候，这 m 个不好写成相同的形式，因此以后的討論中把它們刪掉，卽設 (20.23) 中只写着非零的零点，即 $|a_1|>0$.

現在开始作存在性的証明。这时只考虑具以下形式的函数就够了：

$$z^m \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{p_n(z)}\right\}. \tag{20.24}$$

其中 $p_n(z)$ 是对于 a_n 适当确定的有理整多項式，它的作用是使无穷乘积(20.24)在任意的有界域上一致收斂，換句話說

$$\lim_{\nu\to\infty} g_\nu(z), \quad g_\nu(z)=z^m\prod_{n=1}^{\nu}\left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{p_n(z)}\right\} \tag{20.25}$$

在任意有界域，当 $\nu\to\infty$ 时一致收斂。在这种意义下，$e^{p_n(z)}$ 通常叫做**收斂因子**(convergence-producing factors)。如果(20.22)是有穷个，显然可令 $e^{p_n(z)}=1$, 至于一般情形就不能这样了。

进一步考察 $p_n(z)$：命 R 为任意正数，目的是要定与 R 无关的 $p_n(z)$，使(20.25)在 $|z|\leqslant R$ 一致收斂。对于满足 $|a_n|\geqslant 2R$, $n\geqslant m_0$ 的 n, 任意确定 $\log 1$ 的一个分支(例如可以确定 $\log 1=0$)，則当 $|z|\leqslant R$ 时 $\log\left(1-\dfrac{z}{a_n}\right)$ 为单值。命

$$r_n(z)=\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+p_n(z), \tag{20.26}$$

$$p_n(z)=\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}, \tag{20.27}$$

則在 $|z|\leqslant R$ 有

$$r_n(z)=\frac{1}{m_n+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+1}+\frac{1}{m_n+2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+2}+\cdots.$$

故

$$|r_n(z)|\leqslant\frac{1}{m_n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1}\left(1-\frac{R}{|a_n|}\right)^{-1},$$

$$\sum_{n=m_0}^{\infty}|r_n(z)|\leqslant 2\sum_{n=m_0}^{\infty}\frac{1}{m_n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1}. \tag{20.28}$$

另一方面，(20.24) 的 z^m 以及开始的 m_0-1 个因子与在 $|z|\leqslant R$ 的一致收斂无关，又 $n\geqslant m_0$, $\frac{R}{|a_n|}\leqslant\frac{1}{2}$, 所以与 R 无关地，命

$$m_n=n \quad (n=m_0,\ m_0+1,\ \cdots), \tag{20.29}$$

則級数 $\sum_{n=m_0}^{\infty} r_n(z)$，因而无穷乘积 (20.24) 在 $|z|\leqslant R$ 一致收斂。

以上証明了在 $z=a_n$ 有(給定級的)零点的整函数的存在，反之假定給定了这样的整函数 $f(z)$，用上面得出的 $g(z)$，作 $\frac{f(z)}{g(z)}$，这函数在 Gauss 平面上为沒有零点的整函数，故有整函数 $h(z)$，使

$$\frac{f(z)}{g(z)}=e^{h(z)}.$$

綜合以上結果，得

定理 3 若 $a_n(a_n\neq 0,\ n=1,\ 2,\ \cdots)$ 为 Gauss 平面上任意給定的点列，当个数为无穷多时，滿足 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$，各 a_n 按級重复写出。$f(z)$为以 a_n 作零点(級考慮在内)的整函数的充要条件是$f(z)$能表达成

$$f(z)=z^m e^{h(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}}, \quad (20.30)$$

其中 m 为 0 或某一正整数，$h(z)$ 为某一整函数，m_n 为使 (20.30) 的右端在所有的有界域为一致收斂所确定的正整数。

定理 3 是 Weierstrass 关于整函数因子分解的定理，(20.30) 右端的无穷乘积部分叫做 Weierstrass 的**典型乘积** (canonical product)。

对于半純函数的同样的定理有定理 3 的推論，即

系 半純函数可以被表达成两个整函数的商。

証明 如果給定的半純函数不是整函数，用它的极点(級也考虑在内)作零点，根据定理 3 作一整函数 $g(z)$。因此 $h(z)=f(z)\cdot g(z)$ 显然是一个整函数，这样 $f(z)$ 就可表达为

$$f(z)=\frac{h(z)}{g(z)}. \quad (20.31)$$

对于給定的整函数 $f(z)$，若它的表达式(20.30)中的 m_n 具有与 n 无关的自然数 q，使

$$m_n\leqslant q \quad (n=1, 2, \cdots) \quad (20.32)$$

的情形特别有趣。这时的 (20.28) $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{q+1}\right\}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{q+1}$，$0<R<+\infty$，要求

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)^{q+1} \quad (20.33)$$

收斂即已充分。使(20.33)收斂的最小整数 q 叫做零点分布 $\{a_n\}$ 的**亏数**(genus)。这一数可以为零或正整数，特别是零的时候，可以取 $p_n(z)=0$，这时不需要收斂因子。

零点分布 $\{a_n\}$ 具(有穷的)亏数 q，且(20.30)右端整函数 $h(z)$ 最高为 p 次有理整函数时，p，q 中的較大的

$$\sigma=\max(p, q), \quad (20.34)$$

叫做函数 $f(z)$ 的亏数。它与 $|f(z)|$（当 $|z|\to\infty$ 时）的增大情况之間，有密切的关系。

为了考察这一关系，今給定滿足 $0<r<+\infty$ 的 r，对于整函数 $f(z)$，命

$$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)| \tag{20.35}$$

随 r 的增大而增大，根据 Liouville 定理（§10 的 4)），只要 $f(z)$ 不是常数，$\lim\limits_{r\to\infty}M(r)=\infty$。因此，也有 $\lim\limits_{r\to\infty}\log(\log M(r))=+\infty$，称

$$\rho=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log(\log M(r))}{\log r} \tag{20.36}$$

为整函数 $f(z)$ 的級 (order)。例如对于 $f(z)=e^z$，$M(r)=e^r$，故 $\rho=1$。当 ρ 为有穷时，有下列定理。

定理 4 有穷級的整函数 $f(z)$ 的亏数 σ 及級 ρ 滿足下列簡单关系：

$$\sigma\leqslant[\rho], \tag{20.37}$$

其中 $[\rho]$ 为不大于 ρ 的最大整数。

証明 整函数 $f(z)$ 的因子分解表达式中，典型乘积的亏数为 q，$h(z)$ 的次数为 p 时，只要証明 $q<[\rho]$，$p\leqslant[\rho]$ 就够了。

$q<[\rho]$ 的証明。首先在 (20.30) 中命 $\dfrac{f(z)}{z^m}=f_1(z)$，由 $f_1(z)$ 回到 $f(z)$ 时 ρ 及 σ 都不改变，故开始命 $f(0)\neq0$ 也不失普遍性。

命 $f(z)$ 的零点为 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，且 $|a_n|=r_n\ (n=1,2,\cdots)$，可以认作 $0<r_1\leqslant r_2\leqslant\cdots$。由 Jensen 公式，当 $0<r<+\infty$ 时有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta&=\log\frac{r^n|f(0)|}{r_1r_2\cdots r_n}\\&=\int_0^r\frac{n(t,0)}{t}\,dt+\log|f(0)|.\end{aligned} \tag{20.38}$$

另一方面，令 $h=[\rho]$，则 $h+1>\rho$。因此有正实数 $\varepsilon>0$ 使

$$h+1>\rho+4\varepsilon. \tag{20.39}$$

由于$\rho+\varepsilon>\rho$以及ρ的定义，必有r_0存在，使当$r\geqslant r_0$时有

$$M(r)<e^{r^{\rho+\varepsilon}} \text{ 或 } \log|f(re^{i\theta})|<r^{\rho+\varepsilon}. \tag{20.40}$$

故由 $$\int_0^{2r}\frac{n(t,0)}{t}dt\geqslant\int_r^{2r}\frac{n(t,0)}{t}dt\geqslant n(r,0)\log 2,$$

及(20.38)，当$r\geqslant r^*$时，得

$$n(r,0)\log 2<2^{\rho+\varepsilon}r^{\rho+\varepsilon}-\log|f(0)|. \tag{20.41}$$

另一方面，由$n(r,0)$的定义，$n\leqslant n(2r_n,0)$对于所有的$n(n=1,2,\cdots)$都成立，故有n^*存在，使当$n>n^*$时有

$$n\leqslant n(2r_n,0)\leqslant\frac{4^{\rho+\varepsilon}r_n^{\rho+\varepsilon}-\log|f(0)|}{\log 2}<r_n^{\rho+2\varepsilon},$$

$$\text{或 } \frac{1}{n}>\left(\frac{1}{r_n}\right)^{\rho+2\varepsilon}, \qquad \text{或 } \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{h+1-\varepsilon}{\rho+2\varepsilon}}>\left(\frac{1}{r_n}\right)^{h+1-\varepsilon}$$

成立。因此，由(20.39)有

$$\frac{h+1-\varepsilon}{\rho+2\varepsilon}>\frac{\rho+3\varepsilon}{\rho+2\varepsilon}>1,$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{h+1-\varepsilon}{\rho+2\varepsilon}}$$

收斂，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r_n}\right)^{h+1-\varepsilon}$$

也收斂。

$p\leqslant[\rho]$的証明。命$z=re^{i\theta}$，$0<r<R<\infty$，設整函数$f(z)$在$|z|=R$沒有零点，若$m=n(R,0)$，$|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots$，$f(z)\neq 0$，由(20.1)

$$\log f(z)=iK+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}d\varphi$$
$$+\sum_{\mu=1}^{m}\log\frac{R(a_\mu-z)}{R^2-\bar{a}_\mu z}.$$

微分两端得

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\frac{2Re^{i\varphi}}{(Re^{i\varphi}-z)^2}d\varphi$$

$$+\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{z-a_n}+\sum_{n=1}^{m}\frac{\bar{a}_n}{R^2-\bar{a}_n z}.$$

再关于 z 微分 $h=[\rho]$ 次，得

$$\frac{d^h}{dz^h}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\frac{2Re^{i\varphi}(h+1)!}{(Re^{i\varphi}-z)^{h+2}}d\varphi$$

$$+\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^h h!}{(z-a_n)^{h+1}}+\sum_{n=1}^{m}\frac{\bar{a}_n^{h+1}h!}{(R^2-\bar{a}_n z)^{h+1}}. \qquad (20.42)$$

在这一式中命 $R\to\infty$，看一看得出怎样的結果。首先右端第一項，由(20.40)有

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\frac{2Re^{i\varphi}(h+1)!}{(Re^{i\varphi}-z)^{h+2}}d\varphi\right|$$

$$\leqslant\frac{2R(h+1)!}{(R-r)^{h+2}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log|f(Re^{i\varphi})||d\varphi$$

$$<2(h+1)!\frac{R}{(R-r)^2}\frac{R^{\rho+\varepsilon}}{(R-r)^{h+1}}.$$

因为 $h+1>\rho+\varepsilon$，故当 $R\to\infty$ 时这項收斂于零。

其次第三項，由于 $n=1, 2, \cdots, m$ 时，$|a_n|<R$，$|R^2-\bar{a}_n z|>R^2-Rr$，并注意 $m=n(R, 0)$，故有

$$\sum_{n=1}^{m}\left|\frac{\bar{a}_n^{h+1}h!}{(R^2-\bar{a}_n z)^{h+1}}\right|\leqslant\frac{R^{h+1}h!}{(R^2-Rr)^{h+1}}n(R, 0)<h!\frac{n(R, 0)}{R^{h+1}}.$$

由 (20.41)，有 R^* 存在，当 $R>R^*$ 时有

$$n(R, 0)<\{2^{\rho+\varepsilon}R^{\rho+\varepsilon}-\log|f(0)|\}/\log 2<R^{\rho+2\varepsilon},$$

$$h+1>\rho+3\varepsilon,$$

故显然

$$\lim_{R\to\infty}\frac{n(R, 0)}{R^{h-1}}=0.$$

即这一項也收斂于零。故当 $R\to\infty$ 时只剩下第 2 項，从而下式的右端必定收斂

$$\frac{d^h}{dz^h}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}=(-1)^h h!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-a_n)^{h+1}}. \qquad (20.43)$$

由上述証明，(20.43)的右端对于任意的 R' $(0<R'<+\infty)$，在 $|z|\leqslant R'$ 一致收斂。故把 (20.43) 沿自 0 至 z 的积分路綫积分 $h+1$ 次，即得

$$\log f(z)=\sum_{\nu=0}^{h}c_\nu z^\nu+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+\frac{z}{a_n}+\frac{z^2}{2a_n^2}+\cdots+\frac{z^h}{ha_n^h}\right\}. \qquad (20.44)$$

这里无穷級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\{\quad\}$ 的 0 次到 h 次的逐項微分，在 $|z|\leqslant R'$ 內为一致收斂的級数，且在 $z=0$ 的值为零，故 $\log f(z)$ 的 ν 次微商在 $z=0$ 的值为 $\nu!c_\nu$。由 (20.44) 求 $f(z)$ 时，得

$$h(z)=\sum_{\nu=0}^{h}c_\nu z^\nu, \qquad (20.45)$$

即 $p\leqslant h$。

定理 4 为 Hadamard 給出的結果。为了把它推广到半純函数，R. Nevanlinna 定义半純函数的級如下：

$$\tau=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T(r)}{\log r}, \qquad (20.46)$$

其中 $T(r)$ 为給定的半純函数 $f(z)$ 的特征函数。特別 $f(z)$ 为整函数的情形，这个 τ 与整函数的級 ρ 一致的事实容易用以下的方法推出。即由于 $f(z)$ 是整函数，$N(r,f)\equiv 0$，因此

$$T(r,f)\equiv m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqslant\log^+M(r) \qquad (20.47)$$

成立，另一方面，在 $|z|=R$ $(0<r<R,\ z=re^{i\theta})$ 上假定 $f(z)$ 沒有零点，則由 Jensen 公式 (20.5) 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}d\varphi$$
$$=\log|f(z)|+\sum_{|a_\mu|<R}\log\left|\frac{R^2-\bar{a}_\mu z}{R(a_\mu-z)}\right|.$$

这里由于綫性函数 $w=(R^2-\bar{a}_\mu z)/R(a_\mu-z)$ 把圓 $|z|\leqslant R$ 映射到单位圓外 $|w|\geqslant 1$，故最后的各項 $\geqslant 0$，把它們舍去后右端将更小，即

$$\log|f(re^{i\theta})|$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}d\varphi.$$

另一方面，由于 $R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)\geqslant(R-r)^2$ 經常成立，故把这一不等式代入右端的被积函数的分母后，上式的右端成

$$\leqslant\frac{R+r}{R-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(Re^{i\varphi})|d\varphi=\frac{R+r}{R-r}T(R,f). \quad (20.48)$$

合并(20.47)及(20.48)，当 $f(z)$ 为整函数时下列不等式成立：

$$T(r,f)\leqslant\log^+M(r)\leqslant\frac{R+r}{R-r}T(R,f). \quad (20.49)$$

但由定义(20.11)知 $T(R,f)$ 是 R 的連續函数，所以(20.49)当 $0<r<R<+\infty$ 时，纵令在 $|z|=R$ 上有 $f(z)$ 的零点也一定成立。由(20.49)的前半得出 $\tau\leqslant\rho$，在后半命 $R=2r$，則 $\log^+M(r)\leqslant 3T(2r,f)$，从而

$$\rho=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log M(r)}{\log r}\leqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T(2r,f)}{\log 2r}=\tau.$$

由此得出 $\rho=\tau$，R. Nevanlinna 得出了以下的定理，它的証明完全与定理 4 的証明类似，故从略。

定理 5 命 $f(z)$ 为具有穷級 τ 的半純函数，其非原点的零点与极点各为

$$a_1, a_2, \cdots, a_\mu, \cdots;\ b_1, b_2, \cdots, b_\nu, \cdots,$$

其中零点和极点都按照級列入，则 $f(z)$ 必具下列形状：

$$f(z)=z^{\alpha}e^{g(z)}\lim_{R\to\infty}\frac{\prod\limits_{0<|a_\mu|<R}\left(1-\frac{z}{a_\mu}\right)\exp\left(\frac{z}{a_\mu}+\frac{z^2}{2a_\mu^2}+\cdots+\frac{z^p}{pa_\mu^p}\right)}{\prod\limits_{0<|b_\nu|<R}\left(1-\frac{z}{b_\nu}\right)\exp\left(\frac{z}{b_\nu}+\frac{z^2}{2b_\nu^2}+\cdots+\frac{z^q}{qb_\nu^q}\right)}. \tag{20.50}$$

其中 α 为整数，$g(z)$ 为次数不超过 $[\tau]$ 的有理整函数。又 p, q 为使 $\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|a_\mu|}\right)^{\sigma}$，$\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|b_\nu|}\right)^{\sigma'}$ 收斂的最小正整数或零，但

$$\sigma=p+1,\ \sigma'=q+1.$$

【例】 考察 $\sin\pi z=\frac{1}{2i}(e^{i\pi z}-e^{-i\pi z})$ 的因子分解。

首先，由于 $|\sin\pi z|\leqslant e^{\pi|z|}$，故它的級为 1. $\sin\pi z$ 的零点为 0, ±1, ±2, …, 并且都是一級的。命 $a_{2n}=n$, $a_{2n+1}=-n$, 作級数 $\sum\left(\frac{1}{|a_n|}\right)^{\sigma}$，看一看它收斂和发散的情况，$\sum\left(\frac{1}{n}\right)^2$ 为收斂而 $\sum\left(\frac{1}{n}\right)$ 为发散，故典型乘积的亏数为 1. 根据这些事实，由定理 4 有

$$\sin\pi z=ze^{a+bz}\prod_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}.$$

更由于 $\sin\pi z$ 为奇函数，故必須 $b=0$. 欲决定 a，则考虑 $\lim\limits_{z\to 0}(\sin\pi z/z)=\pi$，故 $e^a=\pi\,(a=\log\pi)$.

上面的記号 $\prod'$ 系乘积中不要 $n=0$ 的因子，而就其余的整数 n 所作的乘积。合并 $+n$ 及 $-n$ 的因子也不影响它的一致收斂性，这样作的时候，它的收斂因子相消，故最后得出

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right). \tag{20.51}$$

4) Nevanlinna 第二基本定理 根据有理函数 $f(z)$ 的定

又(§6 的 4)),可用两个有理整函数 $P(z)$, $Q(z)$ 表示为 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 的形状,其中 $P(z)$ 及 $Q(z)$ 的次数各为 μ, ν, 于是,分三种情形:$\mu>\nu$, $\mu=\nu$, $\mu<\nu$ 直接計算 $N(r,f)$, $m(r,f)$, 就知道

$$0<\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{\log r}<+\infty. \tag{20.52}$$

它还可以表示成較弱的形状

$$T(r,f)=O(\log r), \tag{20.53}$$

記号 O 表示当 $r\to\infty$ 时 $T(r,f)/\log r$ 为有界。

反之,今命(20.53)成立,則由于 $\log T(r,f)=O(\log\log r)$, 故 $f(z)$ 的級 τ 为零。这样由定理 5 知道,(20.50)右端 $e^{g(z)}$ 中的 $g(z)$ 的次数为零,故 $e^{g(z)}$ 为一常数;另一方面,由第一基本定理有

$$N\left(r,\frac{1}{f(z)-w_0}\right)\leqslant T\left(r,\frac{1}{f(z)-w_0}\right)\leqslant T(r,f)+S(r),$$

其中 $S(r)$ 为有界,故不論命 $w_0=0$ 或 $w_0=\infty$, 由于 $T(r,f)=O(\log r)$, $n(r,0)$, $n(r,\infty)$ 同时必需为有界,結果 $f(z)$ 的零点及极点的个数均为有穷个,故(20.50)的 $f(z)$ 为有理函数。

当 $f(z)$ 不是有理函数的半純函数时,必定有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\{T(r,f)/\log r\}=\infty,$$

可是 Nevanlinna 又証明了 $T(r,f)$ 看做 $\log r$ 的函数时是凸函数,这样結果更好,即下式成立:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{\log r}=\infty. \tag{20.54}$$

为了研究半純函数在 $z=\infty$ 附近的情况, R. Nevanlinna 証明了一般非常数的半純函数 $f(z)$ 的特征函数 $T(r,f)$ 滿足下列第二基本定理。

定理 6 命 $f(z)$ 为非常数的半純函数, $T(r,f)$ 是它的特征函数。w_1, w_2, w_3 为复数球面上任意的三个彼此互异的值。于是,

$T(r,f)$満足

$$T(r,f)<\sum_{\nu=1}^{3}N(r,w_\nu)-N_1(r)+S(r). \qquad (20.55)$$

其中 $N_1(r)=N\left(r,\frac{1}{f'(z)}\right)+\{2N(r,f)-N(r,f'(z))\}\geqslant 0$；剩余項 $S(r)$ 当 $f(z)$ 的級 τ 为有穷时，$S(r)=O(\log r)$，一般情形自 $0<r<+\infty$ 除去总和有穷的可数个区間后，在其余的部分下面不等式成立：

$$S(r)<O\{\log T(r,f)+\log r\}. \qquad (20.56)$$

根据第二基本定理，首先由于 $N_1(r)\geqslant 0$，可以把它略去，其次用 $T(r,f)$ 除(20.55)的两端，設 $f(z)$ 不是有理函数的半純函数，引用 (20.54)，令 r 取(20.56)例外区間以外的值，而 $r\to\infty$，則由于 $\lim\limits_{r\to\infty}\{S(r)/T(r,f)\}=0$，得

$$1\leqslant\sum_{\nu=1}^{3}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r,w_\nu)}{T(r,f)}.$$

由 3 内减去两端，得

$$2\geqslant\sum_{\nu=1}^{3}\left\{1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r,w_\nu)}{T(r,f)}\right\}. \qquad (20.57)$$

Nevanlinna 命

$$\delta(w_\nu)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r,w_\nu)}{T(r,f)},$$

把 $\delta(w_\nu)$叫做 w_ν 的亏量(defect). 由定义，自然是 $0\leqslant\delta(w_\nu)\leqslant 1$. 假定 w_ν 为 Picard 定理中出现的那样，在 $z=\infty$ 的邻域只取有穷次的 w_ν，則 $N(r,w_\nu)=O(\log r)$，$\delta(w_\nu)=1$. 所以(20.57)是将 Picard 定理更精密化了的結果。

后来英国的 Littlewood 把(20.55)右端 $\sum\limits_{\nu=1}^{3}$ 的項的个数 3 推广到 $q\geqslant 3$ 的任意自然数 q，因此代 (20.57) 以可数无穷多个值 $w_\nu(\nu=1,2,\cdots)$ 的 $\delta(w_\nu)$，

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta(w_\nu)\leqslant 2$$

也是成立的。

§ 21 Mittag-Leffler 及 Runge 定理

今叙述与 Weierstrass 及 Hadamard 的因式分解定理有联系的 Mittag-Leffler 定理。

1) **Mittag-Leffler 定理** 給定 Gauss 平面上只以 $z=\infty$ 为聚点的点列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, 及以各点 a_n 为极点的主要部分

$$G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right), \tag{21.1}$$

作一个以各 a_n 为极点，且在各极点的主要部分恰为 (21.1)、在其余各点正則的半純函数的問題，Mittag-Leffler 已于 1877 年給与了肯定的解答。以后 Mittag-Leffler 又指出上述 $G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$不一定是极点的主要部分，而是在 a_n 的 Laurent 級数負幂項全体(在本节把它叫做 Laurent 級数的**主要部分**)，用同样証法也有滿足这样条件的单值函数。他在 1884 年更进一步用 Gauss 平面上的任意域以替代全 Gauss 平面，也証明了同样的結果。今証明最后这一情形的 **Mittag-Leffler 定理**。

定理 1 給定 Gauss 平面上的任一域 D, 及属于 D 的彼此相异的点构成的点列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, 点列在 D 的边界以外沒有聚点。預給在 a_n 的 Laurent 級数主要部分为

$$g_n(z)=G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_\nu}{(z-a_n)^\nu} \quad (n=1, 2, \cdots), \tag{21.2}$$

則在 D 内上述点列以外的所有点正則，在各 a_n 的 Laurent 級数主要部分恰与 (21.2) 一致的单值函数 $f(z)$ 存在。

証明 首先认作域 D 的边界 Γ 为有界，这样也不失掉任何普

遍性。因为如果 Γ 是无界的話，任取 D 内不属于 $\{a_n\}$ 的一点 z^*，作綫性变换

$$\zeta=\frac{1}{z-z^*},\tag{21.3}$$

則 Γ 变为有界集，而对于 ζ 所得的函数 $f^*(\zeta)$ 由 (21.3) 又可回到为 z 的函数。

今命 ε_n 为正数列，且其和为有穷，对于各个 a_n，命 a_n 与点集 Γ 的距离为 d_n，点列 $\{a_n\}$ 除去有聚点在 Γ 外沒有其他的聚点，故

$$\lim_{n\to\infty} d_n=0.\tag{21.4}$$

命 a_n 到 Γ 上某一点 c_n 的距离恰为 d_n，則由于如 § 11 的 2) 所証明的那样，$G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ 在 $z\neq a_n$ 的全 Gauss 平面上收斂，故以 $z=c_n$ 为中心把它展成 Laurent 級数时，則 $g_n(z)$ 在 $|z-c_n|>d_n$ 能够展成 $\frac{1}{z-c_n}$ 的收斂冪級数，命其为

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\alpha_\nu^n}{(z-c_n)^\nu},$$

这級数在 $|z-c_n|\geqslant 2d_n$ 是一致收斂的。故挑选充分大的 m_n，当 $|z-c_n|\geqslant 2d_n$ 时能够使 $|g_n(z)-P_n(z)|<\varepsilon_n$，其中

$$P_n(z)=\sum_{\nu=0}^{m_n}\frac{\alpha_\nu^n}{(z-c_n)^\nu}.\tag{21.5}$$

这样

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\{g_n(z)-P_n(z)\}\tag{21.6}$$

就是我們欲求的函数之一。事实上，命 z_0 为不属于$\{a_n\}$的 D 的点。z_0 与 Γ 的距离 $\delta=\delta(z_0,\Gamma)$ 为正数，故由 (21.4) 有 n_0，当 $n>n_0$ 时，$\delta>3d_n$. 把

$$f(z)=\sum_{n=1}^{n_0}\{g_n(z)-P_n(z)\}+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\{g_n(z)-P_n(z)\}=\sum^{n_0}+\sum_{n_0+1}$$

分开考察，因为当 $|z-z_0|<\frac{\delta}{3}$, $n>n_0$ 时，$|z-c_n|\geqslant 2d_n$，故无穷級数 $\sum\limits_{n_0+1}$ 的各項的絕对値小于 ε_n，它在 $|z-z_0|<\frac{\delta}{3}$ 一致收斂，因各項只在 c_n 有极点，故 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<\frac{\delta}{3}$ 正則。若对于某一个 n_0，$z_0=a_{n_0}$，則自級数 (21.6) 只去掉关于 n_0 的項，也得出同样的結論。故 $f(z)$ 在 a_n 恰以 $g_n(z)$ 为其 Laurent 級数展开的主要部分。在 $z_0=\infty$ 容易知道 $f(z)$ 为正則。

2) **Runge 定理** Weierstrass 于1880年曾經提出：对于 Gauss 平面上任意域 D，它的(复数球面上的)边界为 Γ 时，則在 D 内部单値正則，以 Γ 上所有点为奇点的函数 $f(z)$ 是存在的。以后不久，为 Runge 所証明。这可用上述 Mittag-Leffler 定理簡单地証明出来。事实上在这一定理中，命

$$G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)=\frac{1}{z-a_n}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

由此得出函数 $f(z)$ 后，再作函数

$$F(z)=e^{\int_{z_0}^{z} f(z)dz}\qquad (z_0\in D),$$

則当点列 $\{a_n\}$ 以 Γ 的所有点为聚点时即为欲求的函数。但 Runge 又詳細檢查了所用的方法，得出了单値正則函数依照有理函数列展开的良好定理。

定理 2 (Runge) 命 D 为 Gauss 平面上的任意有界域，$f(z)$ 是定义于 D 的单値正則函数，則 $f(z)$ 在 D 内能够被 D 内沒有极点的一致收斂的有理函数列的极限表示出来。

証明 分三段証明。第一段。命 z_0 为 D 内的任意定点，z_0 与 Γ 的距离为 δ_0。另一方面，命 $\varepsilon_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 为滿足 $\varepsilon_1>\varepsilon_2>\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ 的任意正数列。取滿足 $\frac{\delta_0}{2}>\varepsilon_n$ 的最小的 n，命 $\varepsilon_1'=\varepsilon_n$，以 Γ 的各点为中心、ε_1' 为半徑作圓，則由 Heine-Borel 定理，可以

选出这样的有穷个圆，它的内部併集 S_1，就能够把 Γ 复盖。这里不属于 S_1 的闭包 $\bar{S}_1$ 的 D 的点最多可以分成有穷个域，其中必有一个含 z_0，称这个域为 D_1。其次，命 D_1 与 Γ 的距离为 δ_1，取满足 $\frac{\delta_1}{2}>\varepsilon_n$ 的最小的 n，命 $\varepsilon_2'=\varepsilon_n$，以 Γ 的各点为中心、半径为 ε_2' 作圆，则由 Heine-Borel 定理，可以选出这样的有穷个圆，其内部併集 S_2 能够把 Γ 全部复盖。不属于 $\bar{S}_2$ 的 D 的点所作的域中，命含 z_0 的域为 D_2。以下同样的反复作下去，就求出 $D_1, D_2, \cdots, D_n, \cdots$。于是，(1) $D_1, D_2, \cdots$ 中的每一个都含 z_0，它的併 $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ 等于 D。(2) 对于所有的 n 有 $\bar{D}_n\subset D_{n+1}\subset\bar{D}_{n+1}\subset D$。(3) 命 D_n 的边界为 Γ_n，则 Γ_n 系由有穷个圆弧构成，这些圆弧的中心在 Γ 上。

第二段。$z\in D_n$ 时，由 Cauchy 积分公式有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{f(t)}{t-z}\,dt.$$

这样由积分的定义，在 Γ_n 上取充分多的点 $t_k=t_k^n(k=1, 2, \cdots, k_n)$ 用与 t_k 接近的 $t_{k'}$ 作

$$f_{\Delta_n}(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{k_n}\frac{f(t_k)(t_k-t_{k'})}{t_k-z}, \tag{21.7}$$

(21.7) 可以任意接近上面的积分。若限定 $z\in D_{n-1}$，则接近是一致的。即取 t_k 充分多，可使

$$\text{当 } z\in D_{n-1} \text{ 时}\quad |f(z)-f_{\Delta_n}(z)|<\varepsilon_n$$

成立。这样所得的有理函数 $f_{\Delta_n}(z)$ 虽然差不多已经有了要求的性质，但在 $\Gamma_n(\subset D)$ 的点 t_k 有极点，因而必须把这些点移到 Γ 或 Γ 外部。

第三段。在 Γ_n 上的 t_k，在构成 Γ_n 一部分的圆弧上，这圆弧的中心 b_k 在 Γ 上。因此只须使 (21.7) 的项

$$\frac{A_k}{z-t_k},\quad A_k=-\frac{1}{2\pi i}f(t_k)(t_k-t_k')$$

在 b_k 有极点就够了，这是容易作到的。

命 $\frac{\varepsilon_n}{k_n}=\varepsilon$，以 b_k 为中心、ε_n' 为半徑作圓 C，因为 D_{n-1} 与 Γ 的距离为 δ_{n-1}，$\frac{\delta_{n-1}}{2}>\varepsilon_n'$，故 D_{n-1} 全部在 C 外。

可是 t_k 在圓 C 的周界上，$\frac{A_k}{z-t_k}$ 在这个圓外单値正則，以 $z=b_k$ 为中心展成 Laurent 級数，則

$$\frac{A_k}{z-t_k}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha_\nu^k}{(z-b_k)^\nu}. \tag{21.8}$$

这个 Laurent 級数的收斂域为一种圓环域 $\varepsilon_n'<|z-b_k|<+\infty$，且由于(21.8)的左端当 $z\to\infty$ 时收斂于零，故右端对应于 $\nu=0,-1,-2,\cdots$ 的項为零。因 (21.8) 在 D_{n-1} 一致收斂，故取 ν_k 充分大，可使

$$\text{当 } z\in D_{n-1} \text{ 时，}\left|\frac{A_k}{z-t_k}-\sum_{\nu=1}^{\nu_k}\frac{\alpha_\nu^k}{(z-b_k)^\nu}\right|<\varepsilon \tag{21.9}$$

成立。对(21.7)的各項作这样的替换，由此所得的函数命为 $f^*_{\Delta_n}(z)$，則由 (21.9)，当 $z\in D_{n-1}$ 时，$|f(z)-f^*_{\Delta_n}(z)|<2\varepsilon_n$。$f^*_{\Delta_n}(z)$ 为只在 $b_k(\in\Gamma)$ $(k=1, 2, \cdots, k_n)$ 有极点的有理函数，所以它就是我們欲求的函数。

第8章 椭圆函数

§22 双周期函数

三角函数 $\sin z$, $\cos z$, $\sec z$, …等，对于任意的复数 z，关系式 $f(z+2\pi)=f(z)$ 成立。同样 e^z 满足恒等式 $f(z+2\pi i)=f(z)$。一般地 $f(z)$ 是一个半純函数，有一个复数 $\omega\neq 0$，关系式

$$f(z+\omega)=f(z) \tag{22.1}$$

对一切有穷的 z 成立时，则叫做 ω 是 $f(z)$ 的**周期**。

今命 $f(z)$ 具两个周期 ω_1, ω_2. 这样，显然

$$\omega=m\omega_1+n\omega_2 \quad (m, n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{22.2}$$

也是 $f(z)$ 的周期。因此假定 ω_2/ω_1 是实有理数，$\omega_2/\omega_1=q/p$（其中 p, q 为整数，p, q 除去 ± 1 外沒有其他的公因数）。这时有满足 $mp+nq=1$ 的整数 m, n 存在，取这样一对，作

$$\omega=\omega_1(m+nq/p)=\omega_1/p=\omega_2/q,$$

ω 也是周期，所以 ω_1 与 ω_2 同时可由一个周期 ω 作出来。又假定 ω_2/ω_1 是实无理数，应用連分数的近似，可求出满足

$$|\omega_2/\omega_1-q_n/p_n|<1/p_n^2, \quad p_n\to\infty$$

的整数 p_n，故有满足 $|\omega|<|\omega_1|/p_n$ 的周期，由于 $f(z)$ 連續，故在直綫 $z=x\omega_1(-\infty<x<+\infty)$ 上 $f(z)$ 为常数，因此在全平面上 $f(z)$ 为常数。剩下的只是 ω_2/ω_1 不是实数的情形。由等式(22.2)的形式，以 $-\omega_2$ 代替 ω_2 也可以，故通常选满足

$$\Im(\omega_2/\omega_1)>0 \tag{22.3}$$

的 ω_1 及 ω_2.

非常数的半純函数，具非实数 ω_2/ω_1 的两周期 ω_1, ω_2 时，叫做**椭圓函数** (elliptic functions)。(22.2)所决定的周期应一起考虑，

只要它們全体不变,如何选擇周期对 (ω_1, ω_2) 都是可以的,最簡单的是以下的挑选方法。

将(22.2)表示的点画在 Gauss 平面上时,构成等間隔的格子点,其中有与原点的距离是正且最小的。(假定沒有的話,同前討論,$f(z)$一定是常数。)

命这个距离为 r,則在 $|z|=r$ 上只有有穷个格子点。命其中幅角最小的为 ω_1。其次,为了挑选 ω_2,今取与向量 ω_1 正交的单位向量 α,由 $z=a\alpha+b\omega_1$, $0<a<+\infty$, $0\leqslant b<1$ 所表示的带形域中,有无穷多个格子点 $z_n=a_n\alpha+b_n\omega_1$,其中 a_n 最小的只有一个,用 ω_2 表示这一格子点,則 $0, \omega_1, \omega_1+\omega_2, \omega_2$ 构成的平行四边形內再沒有格子点,其他所有格子点可以把新得的 ω_1, ω_2 代入(22.2)而求出来。取 α 与 ω_1 所成的角为 $+\pi/2$,則显然 $\Im(\omega_2/\omega_1)>0$。ω_1, ω_2 叫做 $f(z)$ 的一对**基本周期**,四边形 0, ω_1, $\omega_1+\omega_2$, ω_2 叫做它的**基本周期平行四边形** (fundamental periodparallelogram)。又由上述决定基本周期的方法,可以看出:一个自变量 z 的复变函数不能有多于两个的基本周期。

椭圓函数的情况自然是由基本周期平行四边形的形状决定的,但一般地具有下列性质。

定理 1 椭圓函数 $f(z)$ 在它的基本周期平行四边形 R 上(指內部及边)至少有一个极点(Liouville 第一定理)。

証明 若 $f(z)$ 在 R 上的任何点正則,則包括边界在內連續,从而有界。由周期性知道它在全 Gauss 平面也是有界,由 Liouville 定理它是常数(参看 §10 的 4))。

由半純函数的定义,知道椭圓函数 $f(z)$ 在其基本周期平行四边形 R 上极点的个数为有穷个。因此,把 R 依适当的方向稍微平移后,能够使所得的新平行四边形 R' 的边界上沒有极点。

定理 2 椭圓函数 $f(z)$ 在 R' 上所有极点处的殘数和为 0

(Liouville 第二定理)。

証明 命 R' 的四頂点依反时針方向順序为 a_1, $a_2=a_1+\omega_1$, a_3, $a_4=a_1+\omega_2$, 它的周界用 C 表示,則殘数和为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{a_1}^{a_2}+\int_{a_2}^{a_3}+\int_{a_3}^{a_4}+\int_{a_4}^{a_1}\right\}f(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{a_1}^{a_2}\{f(z)-f(z+\omega_2)\}dz$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{a_2}^{a_3}\{f(z)-f(z-\omega_1)\}dz=0. \quad (22.4)$$

命 $f(z)$ 为任意的椭圓函数, γ 为任意常数,則

$$f(z)=\gamma \quad (22.5)$$

在 R 或 R' 的根的个数与 γ 无关。这是由于这样的根在 R 上的个数为有穷个,微小平移 R 作 R',能使在 R' 的周界上沒有根。而 R' 上根的个数和极点的个数(把級計算在內)的差(参看§11 的定理 7)为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f'(z)}{f(z)-\gamma}\,dz, \quad (22.6)$$

完全与(22.4)同样的計算(注意 $f'(z)$ 与 $f(z)$ 是具相同周期的椭圓函数),即可得出这(22.6)的值是 0.

这个与常数 γ 无关的数叫做 $f(z)$ 的級(order),这与 R' 內极点总数相同。又选 R' 使 R' 的周界 C' 上沒有 $f(z)$ 的零点与极点,計算积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

命 $f(z)$ 在 R' 內的零点为 $\alpha_i\,(i=1, 2, \cdots, k)$,极点为 $\beta_i\,(i=1, 2, \cdots, k)$,則由§11 中殘数的計算,知道积分值等于 $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i-\sum_{i=1}^{k}\beta_i$. 另一方面,如果依照(22.4)的計算方法,則知道有整数 m, n,使积分值等于 $m\omega_1+n\omega_2$, 即有

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i - \sum_{i=1}^{k} \beta_i = m\omega_1 + n\omega_2.$$

§23 Weierstrass 橢圓函数

任意給定滿足 $\Im\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)>0$ 的两个复数 ω_1, ω_2，求作以 (ω_1, ω_2) 为基本周期的橢圓函数，且滿足以下的条件。在 $z=0$ 有二級极点

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + c_0 + c_1 z + \cdots,$$

与 $z=0$ 相差 $m\omega_1 + n\omega_2$ 的点以外再沒有极点。故 $f(z)$ 的級为 2，由 §22 的定理 1 知道 c_0 也是任意的，故可以取 $c_0=0$。

今命 $\Omega_{m,n} = m\omega_1 + n\omega_2$，由在 $\Omega_{m,n}$ 的 Laurent 級数展开，与 Mittag-Leffler 定理証明那样，考虑

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n}{}' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{m,n})^2} - \frac{1}{\Omega_{m,n}^2} + g_{m,n}(z) \right\} \quad (23.1)$$

（$g_{m,n}(z)$ 为有理整多項式）

就行。其中 $\sum'$ 表示除去 $m=n=0$，对于其余的整数 m, n 求和。

今命 r 为滿足 $0<r<+\infty$ 的任意正数，則滿足 $r/|\Omega_{m,n}| \geqslant 1/2$ 的 m, n 只有有窮个，对于其余的 m, n 有

$$\left| \frac{1}{(z-\Omega_{m,n})^2} - \frac{1}{\Omega_{m,n}^2} \right| = \frac{|2z\Omega_{m,n} - z^2|}{|\Omega_{m,n}|^2 |z-\Omega_{m,n}|^2} < \frac{6r}{|\Omega_{m,n}|^3}.$$

另一方面，命 $\min(|\omega_1|, |\omega_2|) = \rho$，$\max(|m|, |n|) = k$，則 $|\Omega_{m,n}| \geqslant k\rho$，滿足 $\max(|m|, |n|) = k$ 的整数 m, n 的組合全部共有 $8k$ 个，故

$$\sum_{\max(|m|,|n|)=k} \left| \frac{1}{(z-\Omega_{m,n})^2} - \frac{1}{\Omega_{m,n}^2} \right| < \frac{6r}{(k\rho)^3} 8k = \frac{48r}{k^2\rho^3}.$$

故除去有窮个的 k, m, n 外，当 $|z| \leqslant r$ 时有

$$\sum_{m,n}{}' \left| \frac{1}{(z-\Omega_{m,n})^2} - \frac{1}{\Omega_{m,n}^2} \right| < \frac{48r}{\rho^3} \sum_k \frac{1}{k^2},$$

命 $g_{m,n}(z)\equiv 0$，则(23.1)的右端为以指定的 $\Omega_{m,n}$ 为极点的广义一致收敛的单純函数 $f(z)$。$f(z)$ 以 (ω_1, ω_2) 为基本周期一层，由其构成方法是显然的。这个椭圆函数 $f(z)$ 就是所謂 **Weierstrass 的 $\wp$ 函数**，用 $\wp(z)$ 表示。即

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{m,n}'\left\{\frac{1}{(z-\Omega_{m,n})^2}-\frac{1}{\Omega_{m,n}^2}\right\}. \qquad (23.2)$$

$\wp(z)$ 在 $z=0$ 的 Laurent 展开，由于 $\wp(z)$ 为偶函数，且其常数项为 0，故

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+g_2'z^2+g_3'z^4+g_4'z^6+\cdots,\quad |z|<\rho.$$

故在相同的 $|z|<\rho$，有

$$\wp'(z)=-\frac{2}{z^3}+2g_2'z+4g_3'z^3+\cdots,$$

$\wp'(z)$，$\wp(z)$，$\wp^2(z)$ 等都是具相同周期的椭圆函数。由上式有

$$\{\wp'(z)\}^2=\frac{4}{z^6}-\frac{8}{z^2}g_2'-16g_3'+\cdots,$$

$$\{\wp(z)\}^3=\frac{1}{z^6}+\frac{3}{z^2}g_2'+3g_3'+\cdots,$$

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+g_2'z^2+\cdots,$$

故

$$\{\wp'(z)\}^2-4\{\wp(z)\}^3+20g_2'\{\wp(z)\}=-28g_3'+\cdots. \qquad (23.3)$$

(23.3)左端仍是具基本周期 (ω_1, ω_2) 的椭圆函数，由于在 $|z|<\rho$ 正則，故由 §22 定理 1 它一定是常数。即命 $\wp(z)=\wp$ 时，必須满足以下的关系：

$$\wp'^2-4\wp^3+20g_2'\wp=-28g_3'.$$

命

$$g_2=20g_2',\quad g_3=28g_3', \qquad (23.4)$$

则 $\wp(z)$ 遂为微分方程

$$\wp'^2(z)=4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3 \tag{23.5}$$

的解。故 $w=\wp(z)$ 满足

$$z=\int_{w_0}^{w}\frac{dw}{\sqrt{4w^3-g_2w-g_3}}.$$

这里由于 $z=0$ 为 w 的极点，应命 $w_0=\infty$. 即成立关系式：

$$z=\int_{\wp(z)}^{\infty}\frac{dw}{\sqrt{4w^3-g_2w-g_3}}. \tag{23.6}$$

§ 24　Jacobi 椭圆函数

同样的二級椭圆函数，在基本周期平行四边形内的极点都是一級的时候，其映射情况自然比較簡单。命 K 及 K' 为两个正的实数，$4K$, $2iK'$ 为一对基本周期，我們能够作在 iK' 及 $2K+iK'$ 具一級极点的椭圓函数。取基本周期平行四边形的頂点为 $3K-iK'$, $3K+iK'$, $-K+iK'$, $-K-iK'$, 将它左边的一半 $K-iK'$, $K-iK'$, $-K+iK'$, $-K-iK'$ 一对一共形映射到自 $w=u+iv$ 平面除去 $v=0, |u|\geqslant 1$ 的部分就可以。这时假定 $f(0)=0, f(K)=1$ 就可以把映射唯一确定，$f(K+iK')$ 与大于 1 的实数 k_1 对应。这个变换可由 Schwarz-Christoffel 变换式 (参看 § 17 的 5))

$$z=\int_0^{w}\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}},\quad k=\frac{1}{k_1} \tag{24.1}$$

确定。由 (24.1) 显然可以求出 K 及 K':

$$K=\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},\ K'=\int_1^{k_1}\frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}}. \tag{24.2}$$

将 w 看作 z 的函数，写作 $w=\mathrm{sn}\,z$. 給定 k 时，由 (24.2) 即可决定 $4K$ 及 $2iK'$, 因此 k 叫做 $\mathrm{sn}\,z$ 的**模数** (modulus)．遇必要时把它也写进函数的符号 $\mathrm{sn}\,z=\mathrm{sn}(z, k)$. 命 $k\to 0$ 则 $k_1\to\infty$. 因此由 (24.2) 有 $K'\to\infty$, 又由 (24.1) z 接近

$$z=\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}=\arcsin w,$$

$\operatorname{sn} z$ 趋于 $\sin z$. 与 $\cos z$ 对应的,采取

$$\operatorname{cn}(z, k)=\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z}.$$

关于 z 微分 $\operatorname{sn} z$ 时，結果不是 $\operatorname{cn} z$，引进由 $k^2\operatorname{sn}^2 z+\operatorname{dn}^2 z=1$ 定义的椭圓函数 $\operatorname{dn} z$，于是，$(\operatorname{sn} z)'=\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z$。$\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$ 等叫做 Jacobi **椭圓函数**。

校 后 記

楊 宗 磐

著者功力(Kunugui)金二郎(K.)教授，早年受教于 M. Fréchet，有关于 Fréchet 維数型方面的工作。三十年代在札幌北海道大学任教，研究解析集，是为日本学者研究描述性集論之始。1940 年左右，在单元复变函数論(以下簡称函数論)聚值集 (cluster set) 方面工作过一段，又有过势函数論方面的工作。后在大阪大学任教，被选为日本科学院院士。近年来著者会同其他学者，主編了不少种丛书。

对于函数論，笔者所見甚淺，原著者在本书里，又未曾只字道及撰写意图，只可将笔者仓促之間所得印象，陈述于下。

笔者以为函数論之所以成为学数学的人必須学习的科目之一，是因为它不但在数学內部各分支的理論研究里是不可或缺的工具，幷且常常提供新思想的模型；在应用数学作为工具的統計、物理、力学、天文学等方面的理論研究里，也是不可缺少的。若是要求这样全面照顾，那絕不是二百多頁篇幅所能办到。即使篇幅沒有限制，恐怕也不是一个人能做好的。著者在这里采取了叙述基本事項的方針，有些地方，只介紹了大意，如 § 20 的 Nevanlinna 第二基本定理沒有証明，椭圓函数只作了 6 頁的簡单叙述。在日本，另有专书可讀，恐怕也是原因之一。当然基本事項是不是一定要这些，特別各种內容的比例安排是否应該如此，可以因人而异，有些出入。讀者可以从这本书，参考著者的見解，构成自己的見解。

至于写法，这套丛书似以簡練为旨，本书自不例外，特別对于函数論，笔者以为还有应当考慮的問題。如本书开篇所說，函数論

的历史，将近二百年，函数論本身在发展过程中，曾經促进了某些分支的生成及发展。这些分支成熟之后，应当反过来影响函数論，事实确是如此。但笔者以为遺憾的是，在函数論基本事項的叙述里，这一点的反映比較起来，并不那么多。日本学者在这方面，很下了一番功夫。1938年就有吉田（Yoshida）洋一（Y.）教授的函数論，篇幅不大，作了成功的尝試；后来，这样的著作迭出，着重点各有不同罢了。現在本书又是一部这样的著作。当然，是不是必須这样写，是否这样写就过分追求形式推論，甚至于"灵活"，"本质"的面反被掩沒，可以因人而异，有些出入。讀者可以从这本书，参考著者的見解，构成自己的見解。

翻譯工作中，必須交代的一件事，是名詞的問題。尽量采用了已有而习見的。考虑到 И. И. Привалов 著《复变函数引論》(北京大学数学力学系譯，人民教育出版社出版），大約是讀者最熟习的书，依照这本书的地方很多，如对称，映射，光滑曲綫，解析，連通，共形（見上引书103頁），单叶，单純，支点等等。也有一些，不及遍覽国內著作，找出現成的名辞，只好权且拟譯。

关于"解析"一辞，汉文里也另有"正則"，"单演"，"全純"（見上引 Привалов 著作）等不一而足，这大約都是函数論成长过程中，强調某一点，而起的名称。笔者以为現在不須要这样仔細分开用。而更重要的是，"解析"究竟是以什么局部参变（lokaler parameter）为标准。原书几乎无例外地[§5.2)；§14.3)等提到了另外的]是以 $z-a$ 为标准的。現在按原文及譯者意見，仍用"正則"。

原书中"单位圓"有时只指圓周，更多的指內部（按 Jordan 曲綫定理理解），間或也指內部及周，这时大都用"圓板"或"圓盘"。

原书非常喜欢用某集"上"，"中"，"內"等字样。据笔者的理解，在汉文，这些字样，有它的特定数学意义（例如上，中見笔者《数学分析入門》，例1.2.1下），或与其数学意义相近（內与內部或开

核)。但不敢随便更动，都按原样，好在原书字样，按通常意思理解，与按特定数学意义理解，大体一致。翻譯中也坚持了不另添新的这种用法，所以在共形映射理論，虽是"上"变换，原文没有，也不画蛇添足。

历来岩波讲座都是組稿出版很急，校对工作不免有些欠缺，給工作带来些困难。但主要还是限于笔者水平，有損原意的地方当必很多，一切請讀者指正。

以下逐节談一談笔者的印象，請讀者指正。

第1章，§1. 介紹了 Gauss, Weierstrass 关于复数地位問題的 Kronecker 答案——著名的 Kronecker 定理(1878)——的一部分，即实系数可除代数 (division algebra) 观点的复数系特征。这个著名的 Kronecker 定理在 Понтрягин 拓扑体理論(1932)也起着决定性作用，从而也是几何基础的基石。

§2, 2). 简单地叙述了平面的拓扑事項。§12 用到了相对閉概念，§18 提到了成分。这些都是近代常識，所以未附討論。这些入門阶段事項的簡略叙述，可以参閱笔者的«数学分析入門»。

3) 提到的参变数(x, y)近旁与曲面点近旁$(1, 1)$对应的充要条件，大約古典微分几何书籍都有，例如 Duschek-Mayer, Lehrbuch der Differentialgeometrie, 卷一，III, §1, §2. 但須适当予以补充。这是难免的，原因是古典微分几何重点在几何性质，一般对函数作充分的要求，而本书是采取着放寬条件的方針。

4) 所謂方位一定的航綫是說与子午綫交于定角的航綫。

有这么一小节 Mercator 射影，就过早結論地图投影問題尽于此矣，是不恰当的。地图投影有它本身的問題，决不是函数論或微分几何书籍中一二頁所能叙述清楚。例如地图投影的基本要求，有(i)长度关系正确，(ii)角度关系正确，(iii)面积关系正确。但理論上，在每个方向(i)是不行的；(ii)，(iii)同时成立也不行。(i)～

(iii)之外，当然还可以有其他要求，因而，結合要求，就須要作各种各样的特殊考慮。这不是某一个数学分支所能包办下来的。有兴趣的讀者，望就地图投影的专籍吸取知識。

§3. 本节仅是加工有定評的 L. R. Ford, Automorphic Functions, 1929, Chap. 1 而写成的。

第2章，§4. 广义一致收斂放寬了一致收斂，但足以保証极限函数的解析性质。特别为了避免奇点的影响，是在函数論用着非常方便的手段。例如，見定理4，冪級数一般在收斂圓內部已不能一致收斂，而是广义一致收斂。有意思的是，它給出了局部凸，无穷維計量綫性空間，并且局部列紧的最亲切的例。

§5. 1)～4). 函数在某单通域（圓近旁的一般說法）解析的充要条件，見本书的，已有

1. 定理1，其系(实数說法)。

2. 定理6及7(等角性)。

3. 定理8(保持无穷小圓)。

4. 定理11及§10，定理1(Taylor 級数展开)。

5. §8，定理2及§13，定理1(积分)。

6. §9，定理1及定理2(所謂 Cauchy 型积分，或殘数公式的特例)。

必要而非充分的，例如

1. 定理4，从而§9，3) 系2.

2 §11，定理16，从而§11，定理14.

3. §13，定理2.

4. §11，定理9.

5. §19，定理1.

6. §20，定理6.

等等起着非常重要的作用，并且是函数論的大部分內容。

因而，研究解析的充要条件，或以若干已知事实为标准规定函数族方面，由理論兴趣，或由其他部門促进，很早以来就积累了許多文献。例如，将定理8，改成无穷小圓对应无穷小椭圓，就得到 Лаврентьев (1936) 引进的拟共形变换，不但在其他部門起着作用，由純粹函数論看，也是非常有趣的。見 Künzi, Quasikonforme Abbildungen, 1960. 又参看 § 12.

5) 調和函数在函数論之所以重要，已由本小节看出来。实际很多問題，調和函数（或次調和函数，§ 16）解决了之后，函数論問題就得到解决，如 § 17. 其实，函数論一开始，就离不开調和函数（势函数）。§ 1, § 2 指出的控制复数的幅角、絕对值就与調和函数有密切关联。

Radó, Subharmonic Functions, 1937.

3) 单叶函数是由共形映射理論产生的。我国陈建功教授及其門下，在这方面作了不少的工作。影响所及，开展这方面工作的人很多。可参看 Jenkins, Univalent Functions and Conformal Mapping, 1958.

最后，4) 最后一小段文字第一句的意思，笔者不甚明了。定理 4 中沒有“$f'(z_0)\neq 0$”，又与定理下一小段文字的联系，似有些难处。請参閱 Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, 卷一, IV, § 15. 或系笔者的誤会，請讀者注意。

§ 6. 具体函数除 § 3，本节及末章外，少量散見它处，总之不多。本书讲述基本事項，偏重严格推导，具体計算很少。要知道，特殊函数不但丰富了函数論本身，实际問題的解决，最后要靠具体函数完成，这种例举不胜举。Kepler 方程求解中的 Bessel 函数就是自古以来有名的一个。特殊函数必須予以足够的重視。我国莫叶教授在这方面下了多年的功夫。

第 3 章，§ 7. 复变复值函数是最簡单的向量到向量的函数。

本节提到的函数 $z(t)$，当然是最簡单的实数到向量的函数。复积分中用的是最簡单的向量值测度。实变复値函数也是很重要的。

§8. 定理 2 是所謂 Cauchy-Goursat-Pringsheim-Heilbronn 形式，即 Γ 是 D 的边界，而不是 D 內曲綫。Heilbronn, Math. Zeits. 37 (1933) 原証明比較难，这里則通过引理 1 平面折綫的作法，化簡了。从此，遇到用 Cauchy 积分定理的时候，例如 §9，定理 1，都是用这較广的形式。

§9. 1)的注意是关于所謂 Cauchy 型积分的定理。§9, §10, §12 都需要 Lebesgue 积分的基本知識。

注意 Poisson 积分給出了圓內調和函数，及囿，L 可测边值間的 Banach 格同构对应。令 $R=1$, $r=e^{-t}(t>0)$，又得出 $L^p(0, 2\pi)$ 的强連續算子半群。具体如何定义，从略。

第 4 章，§10. Poisson 积分的 Fourier 級数展开，表示 Poisson 积分是 $L^2(0, 2\pi)$ 的紧自伴算子。所以我們提到这些，就是要指出具体的問題是根本的。

Liouville 定理是至此为止的惟一的非局部性命題。它又可以看作 Casorati-Weierstrass 定理，Picard 定理，甚至于 Nevanlinna 第二基本定理的前驅。

截至此处，大体結束了函数在解析点附近的基本性质。

§11. 本节及下节讲述了一意函数在非解析点的一些基本事項。§11 則由函数展开及性质两方面作了孤立奇点的分类（定理 1, 4, 14），一些簡单函数的形状及內在特征（定理 11），另外若干在計算有用的定理。

代数学基本定理，不是近世代数的理解。在近世代数（肇始于 Steinitz, 1910），形式上只是添一个符号，說明沒有矛盾，而更重要的是根体与系数体結构間的关系。古典的理解，依賴于数系的連續性，成了一个极簡单的值分布特例。

Laurent 展开的类比,在特殊函数研究里也有用,如 Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, XVI 章。

§12. 讲述一意函数在非孤立奇点,特别几个典型的可去情形。

Painlevé 定理(連續体=两点以上的閉通集),

定理 3 (1 維 Hausdorff 測度零,因之,不含連續体的閉集,見 Hurewicz-Wallman, Dimension Theory, 定理 VII. 9; 不含連續体的閉集却未必 1 維 Hausdorff 測度零,見 Poinpieu 例),

Looman-Меньшов 定理(可数个点)。

Looman-Меньшов 定理又是探討函数解析充要条件范疇的定理。这是就 Cauchy-Riemann 条件的。就等角性,等綫性也可以。主要就这三方面探討函数解析充要条件的綜合著作,有 D. Menchoff (Меньшов 拉丁拼法), Les conditions de monogenéité, 1936.

冪級数在收斂圓周的情况,特别与系数的关系,一般边界的半純函数的聚值集也可归入一意函数的奇点問題。分别見 Bieberbach, Analytische Fortsetzung, 1955; Mandelfrojt, Les singularités des fonctions analytiques représentées par une série de Taylor, 1932; Noshiro, Cluster Set, 1960.

第 5 章, §14. 讲述了关于解析开拓的极其基本的事項,有关的問題还很多。解析开拓奠基于一致定理,而它只是函数解析的必要条件。那么解析开拓里,除較方便地作出直接开拓外,究竟用了多少冪級数的性质?

§15. 注意函数元素 $\{P(t), Q(t)\}$ 里,去掉了固定坐标系的影响。

Weyl 說, R 面是函数論的根本。原話是这样的:

Die Riemannsche Fläche ist ein unentbehrlicher sachlicher

Bestandteil der Theorie, sie ist geradezu deren Fundament. Sie ist auch nicht etwas, was a posteriori mehr oder minder künstlich aus den analytischen Funktionen herans distilliert wird, sondern muß durchaus als das prius betrachtet werden, als der Mutterboden, auf dem die Funktionen allererst wachsen und gedeihen können.

第6章，§16．为了証明 Riemann 基本定理，先解决 Dirichlet 問題，这样作，或許更适应一般情况。Dirichlet 問題解法，平面的 Riemann 定理証法，另外还有，也都是讀者所熟知的。

§17．定理 A 叙述中的"有穷次分歧点"，在§15里沒有解釋，写在这里的用意不明。

关于边界对应，这里假定了下列簡单定理：

$f(z)$ 定义于域 D，在 D 的每个边界点 ζ，$f(z)\to\gamma$ ($z\to\zeta$, $z\in D$) 成立。于是，令 $\gamma=f(\zeta)$，則 f 成定义于 $\overline{D}$ 的函数，在边界点連續。

§18．在这里看到了一点点多値函数的周期导出了綫代数問題的情况。实际綫代数的古典部分，很多与十九世紀末 Abel 积分理論有关。

調和測度，在这里，只是一个名称。但是这个特殊的調和函数，在函数論非常重要，能統一概括許多例如估計函数絕对值的定理，也是研究 R 面的工具。可参閱 Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, 1953; Carathéodory, Funktionentheorie, II (有英譯本)。

第7章，§19．Picard 定理群 (包括 Bloch 定理) 也可以由共形映射长估計的方法証明；也可以用正規族証明。后者虽是定性的，逊于定量結果，但基于統一原則这一点非常重要。关于正規族的基本事項，日文书很好見，故原书不录。此外，可参看 Montel,

Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications, 1927.

清水(Shimizu)辰次郎(T.)教授曾說过，Bloch 定理里用着导函数絕对値的最大値（参看 Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 更明显），似已最大限度用到了反函数的性质，因而，更簡单的 Picard 定理群証明，恐怕不容易得到。

§ 20. 半純函数的 Nevanlinna 理論，誠然直接来自 Picard 定理。若更上溯的話，Riemann 在解析数論引进了 ζ-函数，ζ-函数的零点分布及其典型乘积表示里已有端倪。

直接处理 $n(r, a)$ 似是更直接了当，但变动要激烈，不易控制，所以求平均，作 $N(r, a)$。$m(r, a)$ 也是一样，因为只考虑接近的部分，所以取 $\log^+$。Jensen-Nevanlinna 公式中，只为消除 $\log|f(z)|$ 在圓內的零，极点，例如，可以用

$$\log|f(z)|-\sum\log|z-a_\nu|+\sum\log|z-b_\nu|.$$

但是沒有 Green 函数好。用 Green 函数圓周上点与零，极点的相对位置影响較小。

由其他部門迫使函数論考虑的函数，整函数，全平面半純函数，特别有穷級占大多数。

Nevanlinna 理論側重絕对値分布，当然应当还有幅角分布。

我国熊庆来教授及其門下，在半純函数理論方面工作，早年关于无穷級函数者极为显著。近年来，特别注意代数体函数，及深入 Nevanlinna 第二定理的各种問題。李国平，庄圻泰，刘俊賢，赵进义，范会国，蒲保民，余家荣等教授在 Borel 方向，半純函数一般理論，半純函数的反函数等各方面工作。可参閱 Hiong, K. L.（熊庆来），Sur les fonctions méromorphes et les fonctions algébroïdes, 1957; Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen,

1953; Wittich, Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen, 1955.

最后，函数論发展历史的叙述，关于十九世紀的有 Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Teil I, 1926; 截至 1932 年的有 Julia, Essai sur le développement de la théorie des fonctions de variables complexes, 1933.

以上提到的书籍，究竟合用与否，請讀者斟酌，仅供参考。其他有关事項及参考文献，請参看譯者序。